

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Н.А. Кудряшов

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Рекомендовано УМО „Ядерные физика и технологии”
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 517.958(075)

ББК 22.161.1я7

К 88

Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. — М.: МИФИ, 2008. — 352 с.

Основное внимание в книге уделено методам построения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Для решения задач Коши для уравнений Кортевега — де Вриза и \sin -Гордона представлен метод обратной задачи рассеяния. Для ряда других нелинейных дифференциальных уравнений предложены методы, с помощью которых находятся точные решения.

Для демонстрации методов, представленных в книге, выбраны наиболее популярные нелинейные дифференциальные уравнения: уравнение Кортевега — де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение \sin -Гордона, уравнение Курамото — Сивашинского, уравнение Гинзбурга — Ландау, уравнение нелинейной теплопроводности и хорошо известные системы уравнений: система Лоренца и система Хенона — Хейлеса. Книгу можно рассматривать как справочник по наиболее известным нелинейным дифференциальным уравнениям и методам их решения. В ней дается краткая история открытия известных нелинейных дифференциальных уравнений и предлагается информация о физических процессах, при описании которых они встречаются.

Предназначена для студентов, аспирантов и научных работников интересующихся нелинейными математическими моделями, теорией солитонов и методами построения решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент проф., д-р физ.-мат. наук О.В. Нагорнов

© *Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2008*

ISBN 978-5-7262-0943-2

Оглавление

Предисловие.	10
Глава 1. Нелинейные математические модели	
1.1. Уравнение Кортевега—де Вриза для описания волн на воде	15
1.2. Иерархия уравнений Кортевега—де Вриза	27
1.3. Уравнение Кадомцева—Петвиашвили	28
1.4. Модель для описания возмущений в цепочке одинаковых масс	29
1.5. Иерархия модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза	37
1.6. Уравнение Буссинеска	38
1.7. Фазовая и групповая скорости волн	38
1.8. Нелинейное уравнение Шредингера для огибающей волнового пакета	44
1.9. Уравнение Гинзбурга—Ландау	48
1.10. Уравнение \sin -Гордона для описания дислокаций в твердом теле	50
1.11. Нелинейное уравнение переноса и уравнение Бюргерса	55
1.12. Уравнение Кортевега—де Вриза—Бюргерса для описания волн в вязкоэластичной трубке	61
1.13. Уравнение Курамото—Сивашинского для описания волновых процессов	68

1.14. Уравнение для описания волн в жидкости с конвекцией	70
1.15. Уравнение пятого порядка для описания волн под ледяным покровом	71
1.16. Нелинейное уравнение шестого порядка для описания процессов турбулентности.	71
1.17. Уравнение Колмогорова—Петровского—Пискунова . .	73
1.18. Уравнение Бюргерса—Хаксли	73
1.19. Уравнения фильтрации газа в пористой среде.	75
1.20. Нелинейное уравнение теплопроводности.	77
1.21. Модель Хенона—Хейлеса	78
1.22. Система Лоренца	82

Глава 2. Элементы группового анализа дифференциальных уравнений

2.1. Однопараметрическая группа преобразований Ли . .	92
2.2. Инварианты. Инфинитезимальный оператор группы преобразований	96
2.3. Инвариантные уравнения	100
2.4. Групповой анализ дифференциальных уравнений. . .	102
2.5. Группы преобразований, допускаемые обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка	107
2.6. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группы преобразований. . .	110
2.7. Группы преобразований для линейного уравнения теплопроводности	114
2.8. Группы преобразований для нелинейного уравнения теплопроводности	119
2.9. Группы преобразований для уравнения Кортевега—де Вриза	122

Глава 3. Аналитические свойства нелинейных дифференциальных уравнений

3.1. Классификация особых точек функций комплексной переменной	125
3.2. Неподвижные и подвижные особые точки	128
3.3. Уравнения, не имеющие решений, с критическими подвижными особыми точками	131
3.4. Определение свойства Пенлеве и уравнения Пенлеве .	136
3.5. Алгоритм Ковалевской анализа дифференциальных уравнений	139
3.6. Локальные представления решений уравнений типа Пенлеве	146
3.7. Трансцендентная зависимость решений первого уравнения Пенлеве	151
3.8. Преобразования Бэклунда для решений второго уравнения Пенлеве	157
3.9. Рациональные и специальные решения второго уравнения Пенлеве	159
3.10. Дискретные уравнения Пенлеве	160
3.11. Пары Лакса для уравнений Пенлеве	163
3.12. Алгоритм Конта—Форди—Пикеринга для анализа уравнений на тест Пенлеве	166
3.13. Применение алгоритма Конта—Форди—Пикеринга . .	169
3.14. Преобразование Миуры и пара Лакса для уравнения Кортевега—де Вриза	172
3.15. Законы сохранения для уравнения Кортевега—де Вриза	175
3.16. Преобразования Бэклунда для уравнения Кортевега—де Вриза	179
3.17. Преобразования Бэклунда для уравнения \sin -Гордона	181
3.18. Семейство уравнений Кортевега—де Вриза	184
3.19. Тест Абловица—Рамани—Сигура для нелинейных уравнений в частных производных	187

3.20. Метод Вайса—Табора—Карневейля для анализа нелинейных уравнений	191
3.21. Пенлеве-анализ уравнения Бюргерса методом Вайса—Табора—Карневейля	193
3.22. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.	196
3.23. Анализ уравнения Кортевега—де Вриза методом Вайса—Табора—Карневейля	199
3.24. Построение пары Лакса для уравнения Кортевега—де Вриза методом ВТК	201

Глава 4. Методы решения интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных

4.1. Общие, частные и точные решения дифференциальных уравнений	202
4.2. Простейшие решения уравнения Кортевега—де Вриза	206
4.3. Автомодельные решения уравнения Кортевега—де Вриза.	212
4.4. Метод обратной задачи рассеяния решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Вриза	214
4.5. Метод Хироты для нахождения солитонных решений уравнения Кортевега—де Вриза	218
4.6. Простейшие решения модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза	224
4.7. Автомодельные решения модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза	226
4.8. Решения уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка в переменных бегущей волны	228
4.9. Уединенные волны, описываемые нелинейным уравнением Шредингера и групповой солитон	234
4.10. Простейшие решения уравнения \sin -Гордона и топологический солитон	237

4.11. Метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши для уравнения \sin -Гордона	241
---	-----

Глава 5. Методы построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений

5.1. Метод укороченного разложения для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений	244
5.1.1. Точные решения уравнения Шарма—Тассо—Олвера	245
5.1.2. Точные решения уравнения Бюргерса—Хаксли	247
5.1.3. Точные решения уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса	252
5.2. Метод экспоненциальной функций для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений	256
5.2.1. Точные решения уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова	257
5.2.2. Точные решения уравнения Гарднера с учетом диссипации	259
5.3. Метод гиперболического тангенса для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений	261
5.3.1. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка	263
5.3.2. Точные решения уравнения Гинзбурга—Ландау	265
5.4. Метод простейших уравнений для поиска точных решений	270
5.4.1. Уединенные волны, описываемые уравнением Курамото—Сивашинского	272
5.4.2. Периодические волны уравнения Курамото—Сивашинского	277

5.4.3.	Уединенные волны на поверхности жидкости с конвекцией	279
5.4.4.	Периодические волны на поверхности жидкости с конвекцией	280
5.5.	Применение многоугольников при построении точных решений	282
5.5.1.	Точные решения обобщенного уравнения Курамото—Сивашинского	285
5.5.2.	Автомодельные решения уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка	289
5.5.3.	Автомодельные решения модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка	293
5.5.4.	Уединенные волны нелинейного эволюционного уравнения шестого порядка	296
5.6.	Аналитические свойства системы уравнений Лоренца	300
5.6.1.	Тест Пенлеве для системы уравнений Лоренца	300
5.6.2.	Первые интегралы системы уравнений Лоренца	306
5.6.3.	Точно решаемые случаи системы Лоренца	309
5.6.4.	Точные решения системы уравнений Лоренца	312
5.7.	Аналитические свойства системы уравнений Хенона—Хейлеса	317
5.7.1.	Тест на свойство Пенлеве для системы уравнений Хенона—Хейлеса	317
5.7.2.	Точные решения системы уравнений Хенона—Хейлеса	320
5.8.	Автомодельные решения задач нелинейной теплопроводности	323
5.8.1.	Автомодельные решения задачи о распространении тепловой волны из мгновенного точечного источника	323

5.8.2. Приближенные решения задачи нелинейной теплопроводности при заданной температуре на границе	326
5.8.3. Приближенные решения задачи нелинейной теплопроводности при экспоненциальной зависимости температуры от времени на границе	334
5.8.4. Автомодельные решения плоской задачи при заданном потоке на границе	336
Литература	344

Предисловие

При описании процессов в физике, биологии, экономике, химии и в ряде других наук используются нелинейные математические модели, основу которых составляют нелинейные дифференциальные уравнения. Детальное исследование нелинейных математических моделей, как правило, проводится с помощью вычислительных экспериментов. Однако одним из важных этапов исследования таких моделей является поиск возможных аналитических решений. Необходимость аналитического изучения нелинейных моделей, описываемых дифференциальными уравнениями, объясняется тем, что при численном моделировании задач возможно появление ошибок, которые могут быть устранены при сравнении результатов численного моделирования с аналитическими решениями. Аналитические решения уравнений часто используются при анализе устойчивости разностных схем, по которым проводятся расчеты. Кроме того найденные аналитические решения математических моделей чрезвычайно полезны и сами по себе, поскольку в ряде случаев знание аналитических решений упрощает понимание изучаемых физических процессов и позволяют оценить роль тех или иных параметров решаемой задачи.

Предлагаемая книга посвящена изложению одного из самых эффективных подходов, используемых для построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Методы, обсуждаемые в данной книге, основаны на замечательных работах С.В. Ковалевской, А. Пуанкаре, П. Пенлеве и многих дру-

гих выдающихся ученых. В настоящее время такие методы носят название методов Пенлеве и являются предметом изучения аналитической теории дифференциальных уравнений.

Как нередко бывает в науке, направление, о котором пойдет речь в книге, прошло все этапы своего развития, от этапа бурного развития, последующего за ним этапа забвения, до этапа возрождения, когда многие подходы и методы были открыты вновь. Однако главным является то обстоятельство, что в настоящее время методы Пенлеве стали мощным инструментом решения задач и с их помощью даны ответы на многие вопросы теории дифференциальных уравнений.

Для демонстрации методов, предложенных в книге, выбраны наиболее популярные нелинейные дифференциальные уравнения и знаменитые системы уравнений: система Лоренца и система Хенона—Хейлеса. Книгу можно рассматривать как справочник по наиболее известным нелинейным дифференциальным уравнениям и методам их решения. В ней дается краткая история открытия известных нелинейных дифференциальных уравнений и предлагается информация о физических процессах, при описании которых эти уравнения встречаются. Отличительной особенностью книги является тот факт, что основное внимание в ней уделено построению точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Еще одна отличительная черта книги — для успешного и эффективного применения представленных в ней методов следует использовать математические пакеты вычислений типа MAPLE и MATHEMATICA.

Уравнения, которые рассматриваются в данной книге, условно можно разделить на два класса. К первому классу относятся нелинейные уравнения в частных производных, для которых может быть решена задача Коши при начальном условии достаточно общего вида. О таких уравнениях будем говорить как о точно решаемых нелинейных уравнениях. В зарубежной литературе, а в последнее время и в русскоязычной об уравнениях этого типа говорят как об интегрируемых уравнениях. Для наи-

более популярных нелинейных уравнений математической физики — Кортевега—де Вриза, нелинейного уравнения Шредингера и \sin -Гордона — можно сказать, что они являются и точно решаемыми, и интегрируемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. Точно решаемых нелинейных уравнений в частных производных в настоящее время известно достаточно много. Строго говоря, их бесконечно много, если принять во внимание тот факт, что каждому интегрируемому уравнению соответствует целая иерархия уравнений.

Второй класс уравнений условно можно назвать классом частично интегрируемых уравнений. Задача Коши для них в общем случае не решается. При поиске точных решений уравнений указанного класса обычно используются автомодельные переменные или переменные бегущей волны. Задача Коши для таких уравнений может быть решена только для конкретного, как правило, заранее неизвестного начального условия.

Предлагаемая читателю книга состоит из пяти разделов. В первом приводятся наиболее популярные нелинейные дифференциальные уравнения (уравнение Кортевега—де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение \sin -Гордона, уравнение Бюргерса, уравнение Курамото—Сивашинского и др.) и известные нелинейные системы дифференциальных уравнений. Предлагаются выводы некоторых уравнений и дается информация о физических процессах, при описании которых встречаются обсуждаемые дифференциальные уравнения.

Во втором разделе обсуждаются элементы группового анализа дифференциальных уравнений. Применение методов теории группового анализа в настоящее время детально изложено в целом ряде книг (см., например, монографии [30, 61, 62]). Этот раздел в данной книге имеет вспомогательный характер, поскольку решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных часто находятся путем перехода к обыкновенным дифференциальным уравнениям, используя инвариантные переменные, полученные с помощью групп преобразований.

В третьем разделе книги содержатся сведения, которые можно классифицировать как аналитические свойства нелинейных дифференциальных уравнений. В этом разделе описаны наиболее общепринятые в настоящее время алгоритмы анализа обыкновенных дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве и обсуждается связь нелинейных уравнений в частных производных с ОДУ, имеющими свойство Пенлеве. Предложены пары Лакса для уравнения Кортевега—де Вриза, позволяющие решить задачу Коши для этого уравнения. Даются выводы преобразований Бэклунда для второго уравнения Пенлеве, для уравнения \sin -Гордона и для уравнения Кортевега—де Вриза.

В четвертом разделе предложены методы решения, применимые для широко известных нелинейных уравнений в частных производных: для уравнения Кортевега—де Вриза, модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза, нелинейного уравнения Шредингера и уравнению \sin -Гордона. Задача Коши для переносных уравнений решается методом обратной задачи рассеяния, но их простейшие решения находятся с помощью перехода к обыкновенным дифференциальным уравнениям, используя переменные бегущей волны.

В этом разделе обсуждается также метод обратной задачи рассеяния решения задачи Коши для уравнений Кортевега—де Вриза и \sin -Гордона. Для уравнения Кортевега—де Вриза рассмотрен метод Хироты, с помощью которого находятся солитонные решения точно решаемых нелинейных уравнений в частных производных. Часть материала, относящаяся к методу обратной задачи рассеяния решения задачи Коши для уравнений Кортевега—де Вриза и \sin -Гордона, изложена конспективно. Указанный метод в настоящее время детально изложен в недавно изданной книге автора: Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

В пятом разделе содержится ряд методов, которые применяются при построении точных решений нелинейных дифференци-

альных уравнений. Методы, предлагаемые в этом разделе, могут использоваться и при нахождении точных решений интегрируемых уравнений, но наиболее эффективны они при поиске решений уравнений, для которых задача Коши в общем случае не решается. Процедура построения решений обычно содержит этап перехода к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и методы по существу применяются для построения решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автор надеется, что книга будет полезна студентам и аспирантам, научным сотрудникам и преподавателям, интересующимся построением нелинейных математических моделей и методами нахождения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Предлагаемая книга написана на основе курса лекций, читаемого автором более двадцати лет студентам четвертого и пятого курсов кафедры Прикладная математика Московского инженерно-физического института (государственного университета). Вопросы затронутые в книге неоднократно обсуждались на научных семинарах с коллегами по кафедре, а также на конференциях, посвященных изучению нелинейных эволюционных уравнений и динамических систем. Особенно полезны были дискуссии с профессорами А.В. Аксеновым, В.И. Громаком, М. Крускалом, Р. Контом, Э. Пикерингом и В.И. Цигельником. Всем им автор выражает свою искреннюю признательность.

При подготовке рукописи к печати оказали большую помощь Н.Б. Логинова и М.А. Чмыхов, которым автор выражает благодарность.

Глава 1

Нелинейные математические модели

1.1. Уравнение Кортевега—де Вриза для описания волн на воде

Явление распространения волн на поверхности воды издавна привлекало к себе внимание исследователей. Это — пример волн, которые каждый мог наблюдать еще в детстве и которые обычно демонстрируются в рамках школьного курса физики. Однако это довольно сложный тип волн. По выражению Ричарда Фейнмана, «более неудачного примера для демонстрации волн придумать трудно, ибо эти волны нисколько не похожи ни на звук, ни на свет; здесь собрались все трудности, которые могут быть в волнах» [69].

Если рассмотреть бассейн, наполненный водой, и на его поверхности создать некоторое возмущение, то по поверхности воды начнут распространяться волны. Возникновение их объясняется тем, что частицы жидкости, которые находятся вблизи впадины, при создании возмущения будут стремиться заполнить впадину,

находясь под действием силы тяжести. Эволюция этого явления с течением времени и приведет к распространению волны на воде. Частицы жидкости в такой волне двигаются не вверх-вниз, а приблизительно по окружностям, поэтому волны на воде не являются ни продольными, ни поперечными. Они как бы являются смесью тех и других. С глубиной радиусы окружностей, по которым двигаются частицы жидкости, уменьшаются до тех пор, пока не станут равными нулю [70].

Если анализировать скорость распространения волны на воде, то оказывается, что эта скорость зависит от ее амплитуды. Скорость длинных волн пропорциональна корню квадратному из ускорения свободного падения, умноженному на сумму амплитуды волны и глубины бассейна. Причиной возникновения таких волн является сила тяжести.

Для коротких волн возникновение восстанавливающей силы обусловлено силой поверхностного натяжения, и потому скорость таких волн пропорциональна корню квадратному из частного, в числителе которого стоит поверхностное натяжение, а в знаменателе — произведение длины волны на плотность воды. Для волн средней длины скорость их распространения зависит от всех перечисленных выше параметров задачи. Из сказанного ясно, что волны на воде и в самом деле явление довольно сложное.

Любопытную волну на воде наблюдал шотландский ученый Джон Скотт Рассел в 1834 г. Рассел занимался изучением пропускной способности канала Юнион, который начинается у Эдинбурга и соединяет через канал Форз — Клайд два берега Шотландии. Обратимся к замечательному описанию этого наблюдения самим Расселом [66].

«Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась; вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого

одиноким возвышением, т.е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, нисколько не меняя своей формы и не снижая скорости. Я поскакал за ним верхом, и, когда я нагнал его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от фута до фута с половиной. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 года мне впервые довелось столкнуться с необычайным и красивым явлением, которое я назвал волной трансляции; теперь это название общепринято».

Джон Рассел на протяжении всей своей жизни неоднократно возвращался к наблюдению за уединенной волной. Он верил, что открытая им волна играет очень важную роль во многих явлениях в природе. Им были установлены некоторые свойства этой волны. Во-первых, он заметил, что она движется с постоянной скоростью и без изменения формы. Во-вторых, он нашел зависимость скорости этой волны от глубины канала h и высоты волны a :

$$C = \sqrt{g(a + h)},$$

где g — ускорение свободного падения; причем $a < h$. В-третьих, Рассел обнаружил, что возможен распад одной большой волны на несколько волн. В-четвертых, он отмечал, что в экспериментах наблюдаются только волны возвышения. Известно также, что он заметил, что открытые им уединенные волны проходят друг через друга без каких-либо изменений, но на последнее очень важное свойство он не обратил серьезного внимания.

Работа Рассела, которая была опубликована им в 1844 году как «Доклад о волнах» [143], вызвала осторожную реакцию в среде ученых. В европейских странах работу не заметили, но в самой Англии на нее обратили внимание Эйри и Стокс. Эйри

подверг критике результаты экспериментов, которые наблюдал Рассел, и отметил, что из теории длинных волн на мелкой воде выводы Рассела не получаются, а также утверждал, что длинные волны не могут сохранять неизменной формы. Эйри не поверил наблюдениям Рассела.

Один из основателей современной гидродинамики — Джордж Габриэль Стокс также не согласился с результатами наблюдений уединенной волны, полученными Расселом, и критически отнесся к факту существования уединенных волн.

После столь негативного отношения к уединенной волне долгое время о ней никто не вспоминал, кроме самого Рассела. Даже приближаясь к старости он писал: «Это самое прекрасное и необычайное явление; день, когда я впервые увидел его, был лучшим днем моей жизни. Никому никогда не посчастливилось наблюдать его раньше или, во всяком случае, понять, что оно значит. Теперь оно известно как уединенная волна трансляции. Никто прежде и вообразить не мог, что уединенная волна возможна. Когда я описал ее сэру Джону Гершелю, он сказал: «Это просто вырезанная половина обычной волны». Но это не так, поскольку обычные волны идут отчасти ниже поверхности воды; кроме того, ее форма совсем иная. Это не половина волны, а несомненно вся волна целиком, с тем отличием, что волна как целое не находится попеременно то ниже, то выше поверхности, а всегда выше ее. Этого вполне достаточно, чтобы такой холм воды не стоял на месте, а двигался».

Определенную ясность в результаты наблюдений Рассела внесли Буссинеск (1872 год) и Рэлей (1876 год), которые независимо друг от друга получили формулу, описывающую характер возвышения свободной поверхности на воде в виде квадрата гиперболического секанса, и вычислили скорость распространения уединенной волны на воде.

Позже опыты Рассела были повторены другими исследователями, которые подтвердили его результаты.

Окончательная ясность в проблеме, возникшей после опытов

Джона Рассела по изучению уединенной волны, наступила только после появления работы датских ученых Кортевега и де Вриза, которые попытались разобраться в существе дела. Эти ученые, обобщив метод Рэля, вывели в 1895 году уравнение для описания одноволнового приближения при распространении волн на воде.

Следуя их работе, рассмотрим процесс распространения малых, но конечных возмущений на поверхности жидкости. О таких возмущениях обычно говорят как о гравитационных волнах, подчеркивая тем самым, что ответственными за возникновение и распространение этих волн являются гравитационные силы.

Предположим, что плотность жидкости при возмущениях поверхности не меняется ($\rho_0 = \text{const}$), тогда уравнение непрерывности запишется [54]

$$\text{div } \vec{u} = 0. \quad (1.1.1)$$

Уравнение движения в поле сил тяжести можно представить в виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}, \nabla \right) \vec{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P = -g \vec{j}, \quad (1.1.2)$$

где \vec{j} — единичный вектор в направлении силы тяжести.

Как правило, при распространении возмущений движение жидкости можно считать безвихревым, поскольку типичные задачи, возникающие в теории волн, рассматриваются при первоначально покоящейся жидкости или в однородном потоке. Известно, что если в начальный момент времени вихрь $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} = 0$, то и в последующие моменты времени $\vec{\omega} = 0$ [52].

Если ввести потенциал скорости φ , определенный выражением

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi, \quad (1.1.3)$$

то уравнение (1.1.1) перейдет в уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1.1.4)$$

Пользуясь формулой векторного анализа

$$\vec{u} \times (\text{rot } \vec{u}) + (\vec{u}, \nabla) \vec{u} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{u}^2),$$

уравнение (1.1.2) для безвихревого движения можно привести к виду

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (u^2) + \frac{\nabla P}{\rho_0} + g \vec{j} = 0, \quad (1.1.5)$$

откуда после интегрирования по z с учетом (1.1.3) получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{P - P_0}{\rho_0} + gz = 0. \quad (1.1.6)$$

В формуле (1.1.6) принято, что ось z направлена вертикально вверх против ускорения свободного падения (рис. 1.1), зависимость от времени, полученная при интегрировании уравнения (1.1.5) по z , включена в потенциал, P_0 — давление окружающей атмосферы на поверхность жидкости.

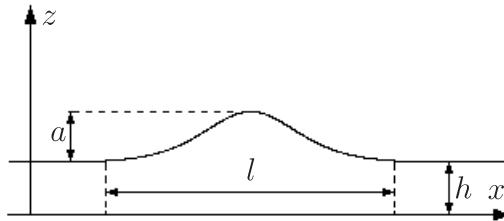


Рис. 1.1. Характеристики плоского возмущения на поверхности жидкости, используемые при выводе уравнения Кортевега—де Вриза

Пусть над поверхностью воды находится воздух, и пусть эта поверхность описывается уравнением

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad (1.1.7)$$

где x , y и z — пространственные координаты, t — время. По определению, поверхность раздела — это поверхность, которую не пересекают частицы жидкости [54]. Вследствие этого компонента скорости жидкости, нормальная к поверхности раздела, и нормальная компонента скорости самой поверхности раздела должны совпадать. Обозначим компоненты скорости жидкости u_1, v и u_2 в направлениях x, y и z .

Нормальная компонента скорости поверхности раздела равна

$$-\frac{f_t}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}. \quad (1.1.8)$$

Нормальная компонента скорости жидкости определяется выражением

$$\frac{u_1 f_x + v f_y + u_2 f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}. \quad (1.1.9)$$

Условие равенства (1.1.8) и (1.1.9) приводит к уравнению

$$f_t + u_1 f_x + v f_y + u_2 f_z = 0. \quad (1.1.10)$$

Пусть поверхность раздела описывается уравнением

$$z = \eta(x, y, t) + h, \quad (1.1.11)$$

где $\eta(x, y, t)$ — отклонение от положения равновесия. Тогда

$$f = h + \eta(x, y, t) - z. \quad (1.1.12)$$

Подставляя (1.1.12) в (1.1.10), имеем

$$\eta_t + u_1 \eta_x + v \eta_y = u_2. \quad (1.1.13)$$

Для волны, для которой $\eta_y = 0$, условие (1.1.13) принимает вид

$$\eta_t + u_1 \eta_x = u_2. \quad (1.1.14)$$

Поскольку

$$u_1 = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z}, \quad (1.1.15)$$

где $\varphi^{(1)}(x, z, t)$ — значение потенциала на поверхности жидкости, то уравнение (1.1.14) может быть представлено через потенциал скорости

$$\varphi_z^{(1)} = \eta_t + \eta_x \varphi_x^{(1)}. \quad (1.1.16)$$

Нелинейное граничное условие (1.1.14) является кинематическим условием и отражает тот факт, что нормальная компонента скорости частиц жидкости на поверхности совпадает со скоростью самой поверхности. Принимая во внимание динамическое условие на поверхности, которое без учета сил поверхностного натяжения сводится к равенству давлений в жидкости и в атмосфере, из (1.1.6) получаем еще одно граничное условие

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi^{(1)})^2}{2} + g z_1 = 0. \quad (1.1.17)$$

Дифференцируя последнее выражение по x , имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g \eta_x = 0. \quad (1.1.18)$$

В случае неподвижной границы для решения уравнения Лапласа требуется лишь одно условие, однако в рассматриваемой задаче положение самой границы неизвестно, поэтому для описания гравитационных волн следует принимать во внимание условия (1.1.14) и (1.1.18).

Предполагая, что на нижней границе жидкости — твердое горизонтальное дно, считаем, что нормальная компонента скорости жидкости на этой границе равна нулю:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (1.1.19)$$

Рассмотрим плоские волны, описываемые уравнением (1.1.4) с учетом граничных условий (1.1.14), (1.1.18) и (1.1.19), предполагая, что, во-первых, длина возмущений много больше глубины жидкости ($h \ll l$), а во-вторых, амплитуда волны много меньше глубины жидкости ($a \ll h$).

Эти предположения соответствуют тому, что в задаче рассматриваются длинные волны на мелкой воде, когда выполняются условия малости двух параметров [53, 54, 72]

$$\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1, \quad \delta = \frac{h}{l} \ll 1. \quad (1.1.20)$$

Далее эти параметры будут играть важную роль при выводе уравнения Кортевега—де Вриза.

Поскольку $\delta \ll 1$, то решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.21)$$

ищем в виде

$$\varphi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x, t) z^n, \quad z \in [0, z_1]. \quad (1.1.22)$$

Подставляя (1.1.22) в (1.1.21) и приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях z , приходим к рекуррентной формуле

$$\varphi_{nxx} + (n+2)(n+1)\varphi_{n+2} = 0. \quad (1.1.23)$$

Учитывая граничное условие (1.1.19), находим, что $\varphi_1 = 0$, при этом из рекуррентной формулы (1.1.23) следует, что $\varphi_{2k+1} = 0$ и все нечетные члены в (1.1.22) обращаются в нуль.

Теперь (1.1.22) превращается в

$$\varphi(x, z, t) = \varphi_0(x, t) - \frac{z^2}{2} \varphi_{0xx} + \frac{z^4}{24} \varphi_{0xxxx} + \dots \quad (1.1.24)$$

Компоненты вектора скорости движения жидкости на свободной поверхности представляются формулами

$$u_1 = \varphi_x^{(1)} = f - \frac{z_1^2}{2} f_{xx} + \dots, \quad (1.1.25)$$

$$u_2 = \varphi_z^{(1)} = -z_1 f_x + \frac{z_1^2}{6} f_{xxx} + \dots, \quad (1.1.26)$$

где введено обозначение

$$f(x, t) = \frac{\partial \varphi_0^{(1)}(x, t)}{\partial x}. \quad (1.1.27)$$

Введем безразмерные переменные и параметры в приведенных выше выражениях. Учитывая, что

$$x = lx', \quad t = \frac{l}{c_0} t', \quad c_0 = \sqrt{gh}, \quad \eta = a\eta',$$

$$u_1 = \varepsilon c_0 u'_1, \quad u_2 = \varepsilon \delta c_0 u'_2, \quad (1.1.28)$$

$$f = \varepsilon c_0 f', \quad z_1 = h(1 + \varepsilon \eta'),$$

и подставляя (1.1.28) в (1.1.25) и (1.1.26), получаем с точностью до членов первого порядка малости по ε и δ^2 следующие выражения (далее штрихи в безразмерных переменных опускаем):

$$u_1 = f - \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (1.1.29)$$

$$u_2 = -(1 + \varepsilon \eta) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\delta^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}. \quad (1.1.30)$$

Граничные условия (1.1.14) и (1.1.18) в безразмерных переменных принимают вид

$$u_2 = \eta_t + \varepsilon \eta_x u_1, \quad (1.1.31)$$

$$u_{1t} + \varepsilon u_1 u_{1x} + \eta_x = 0. \quad (1.1.32)$$

Учитывая выражения для компонент вектора скорости на свободной поверхности (1.1.29) и (1.1.30), из (1.1.31), (1.1.32) с точностью до первого порядка малости по ε и δ^2 находим

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon f \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \eta \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\delta^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad (1.1.33)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon f \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (1.1.34)$$

Заметим, что, полагая в (1.1.33) и (1.1.34) $\varepsilon = \delta = 0$, получаем линейную систему уравнений

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.1.35)$$

которая эквивалентна волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Из (1.1.35) следует, что в нулевом приближении можно взять $f = \pm \eta$, поэтому для решения системы уравнений (1.1.33), (1.1.34) можно применить метод возмущений, представляя решение f в виде разложения по малому параметру [54]

$$f = \eta + \varepsilon f^{(1)} + \delta^2 f^{(2)}. \quad (1.1.36)$$

Сохранив в (1.1.33) и (1.1.34) слагаемые первого порядка малости по ε и δ^2 , получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} + 2\varepsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\delta^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1.1.37)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \delta^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \varepsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (1.1.38)$$

Вычитая из (1.1.37) уравнение (1.1.38), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \delta^2 \left[\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial t} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

Поскольку малые параметры ε и δ^2 независимы, то из (1.1.39) следует

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.1.40)$$

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (1.1.41)$$

Из (1.1.35) имеем

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} = -\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x},$$

поэтому (1.1.40) и (1.1.41) дают зависимости $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ от η :

$$f^{(1)} = -\frac{(\eta)^2}{4}, \quad f^{(2)} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (1.1.42)$$

Подставляя (1.1.42) в уравнение (1.1.37), получаем для $\eta(x, t)$ нелинейное уравнение

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \varepsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\delta^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (1.1.43)$$

Если в (1.1.43) ввести переменные

$$\tau = x + t, \quad \tau = \frac{\delta^2 t}{6}, \quad u = \frac{3\varepsilon \eta}{2\delta^2}, \quad (1.1.44)$$

то (1.1.43) переходит в уравнение

$$u_\tau + 6u u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.1.45)$$

которое называется *уравнением Кортевега—де Вриза*.

Это уравнение было получено в работе Кортевега и де Вриза в 1895 году для описания длинных волн на воде [111].

1.2. Иерархия уравнений Кортевега—де Вриза

Уравнение Кортевега—де Вриза (1.1.45) является первым представителем так называемой иерархии уравнений Кортевега—де Вриза [39]

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} L_{n+1}[u] = 0, \quad (1.2.1)$$

где оператор $L_{n+1}[u]$ — оператор Ленарда, определяемый соотношением [134]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} L_{n+1}[u] &= \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 4u \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) L_n[u], \\ L_0[u] &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Подставляя $n = 1, 2, \dots$ в соотношение Ленарда, приходим к выражениям

$$L_1[u] = u, \quad L_2 = u_{xx} + 3u^2, \quad (1.2.3)$$

$$L_3[u] = u_{xxxx} + 10u u_{xx} + 5u_z^2 + 10u^3, \quad (1.2.4)$$

$$L_4[u] = u_{xxxxx} + 14u u_{xxx} + 28u_x u_{xx} + 21u_{xx}^2 + \\ + 70u^2 u_{xx} + 70u u_x^2 + 35u^4. \quad (1.2.5)$$

Полагая $L_2[u]$ в (1.2.1), получаем уравнение Кортевега—де Вриза:

$$u_t + 6u u_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.2.6)$$

В случае оператора $L_3[u]$ из иерархии уравнений (1.2.1) получаем уравнение пятого порядка

$$u_t + 10u u_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x + u_{xxxxx} = 0. \quad (1.2.7)$$

Как и уравнение Кортевега—де Вриза, уравнение (1.2.7) встречается при описании целого ряда физических процессов. В [140] предложено использовать это уравнение для описания волн на воде. Его связь с неавтономной моделью Хенона—Хейлеса обсуждается в работе [106]. Можно надеяться, что если при выводе нелинейных волновых уравнений учесть влияние параметров более высокого порядка малости, то можно прийти к уравнению (1.2.7) и при описании ряда других волновых процессов.

Уравнение (1.2.7), как и уравнение Кортевега—де Вриза, относится к классу точно решаемых. Оно проходит тест Пенлеве и имеет решения в виде солитонов [39]. Сказанное выше об уравнении (1.2.7) относится ко всем уравнениям иерархии Кортевега—де Вриза. Задача Коши для (1.2.7) решается методом обратной задачи рассеяния, при чем основное уравнение пары Лакса совпадает с аналогичным уравнением при решении задачи Коши для уравнения Кортевега—де Вриза.

1.3. Уравнение Кадомцева—Петвиашвили

В теории длинных слабонелинейных волн на поверхности жидкости, распространяющихся в направлении оси x , в предположении, что изменение в направлении оси y имеет слабую зависимость, известно уравнение [33]

$$(u_t + u u_x + \beta u_{xxx})_x + 3\delta^2 u_{yy} = 0. \quad (1.3.1)$$

Уравнение (1.3.1) впервые предложено Б.Б. Кадомцевым и В.И. Петвиашвили в 1970 году и является широко известным двумерным точно решаемым уравнением.

Оно имеет решения в виде солитонов. Пара Лакса, с помощью которой решается задача Коши для уравнения (1.3.1), была найдена В.С. Дрюма [21] и детально исследована в работе В.Е. Захарова и А.Б. Шабата [25]. Одно из уравнений Лаксовой пары для задачи рассеяния (1.3.1) имеет вид

$$\psi_{xx} + (\lambda + u) \psi + \delta \psi_y = 0 \quad (1.3.2)$$

В периодической литературе уравнение (1.3.1) часто называется двумерным уравнением Кортевега—де Вриза.

1.4. Модель для описания возмущений в цепочке одинаковых масс

В настоящее время кажется странным, что открытие Джоном Скоттом Расселом уединенной волны и его последующее подтверждение в работе Кортевега—де Вриза не получило в прошлом веке никакого резонанса в науке. После 1895 года работы Рассела и Кортевега оказались по существу забытыми почти на 70 лет. Более того, один из авторов знаменитого теперь уравнения Кортевег прожил долгую жизнь (1848–1941) и был известным ученым. Но когда в 1948 году научная общественность отмечала его 100-летний юбилей, то работа, выполненная совместно с де-Вризом в 1895 году, в списке лучших публикаций даже не значилась. Составители списка работ Кортевега сочли эту статью не заслуживающей серьезного внимания. Только спустя еще четверть века именно эта работа стала считаться главным научным достижением Кортевега.

Однако если поразмыслить, то такое невнимание к уединенной волне Рассела становится вполне понятным. Его открытие в течение долгого времени считалось некоторым частным фактом. В то время физический мир представлялся линейным, и принцип суперпозиции считался одним из самых фундаментальных принципов большинства физических теорий. Поэтому серьезного значения экзотической волне на воде ученые не придали.

Возвращение к уединенной волне на воде произошло случайно и вначале к ней не имело никакого отношения. Это случилось в Лос-Аламосе в 1952 году, когда Э. Ферми вместе с двумя своими сотрудниками С. Уламом и Д. Пастой предприняли попытку решить одну из нелинейных задач на ЭВМ. Они хотели рассчитать колебания 64 одинаковых масс, связанных друг с другом пружинками, которые при отклонении от положения равновесия на Δl приобретали возвращающуюся силу $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$. Здесь k и α — постоянные коэффициенты. При этом нелинейная добавка предполагалась малой по сравнению с основной силой $k\Delta l$ [102].

Вот как сам Станислав Улам описывает двадцать лет спустя этот период их совместной работы [73]: «Как только машины были сделаны, Ферми с присущей ему интуицией и огромным здравым смыслом, сразу же осознал все их значение в исследовании проблем теоретической физики, астрофизики и классической физики. Мы обсуждали этот вопрос самым подробным образом и решили попытаться сформулировать какую-нибудь задачу, которая была бы проста в своей постановке, но имела бы решение, требующее очень длинных вычислений, невыполнимых с помощью ручки и бумаги или существующих механических вычислительных устройств. Обсудив ряд возможных задач, мы остановились на одной типовой задаче, связанной с долговременным поведением динамической системы и требующей долгосрочного предсказания. В ней рассматривалась эластичная струна с двумя закрепленными концами, на которую действует не только обычная сила деформации, но и малая по величине нелинейная сила. Необходимо было выяснить, как после очень большого числа пе-

риодов колебаний эта нелинейность будет постепенно влиять на известное периодическое поведение колебаний в одной тональности. Каким образом другие тональности струны приобретут свои амплитуды и как, рассуждали мы, будет происходить термализация движения, имитируя, быть может, поведение жидкостей, которые, будучи вначале ламинарными, становятся все более и более турбулентными, пока, наконец, их макроскопическое движение не преобразуется в тепло».

Создавая начальное отклонение, исследователи хотели посмотреть, как начальная мода будет распределяться по всем другим. Но после проведения расчетов на ЭВМ ожидаемого результата они не получили, но обнаружили, что перекачивание энергии на начальном этапе в две или три моды действительно происходит, но затем наступает возврат к начальному состоянию.

Об этом парадоксе, связанном с повторяемостью начального колебания и получившем название парадокса Ферми—Паста—Улама, стало известно нескольким математикам и физикам. В частности, об этой задаче узнали два американских физика Мартин Крускал и Норман Забуски, которые решили продолжить вычислительный эксперимент с моделью, предложенной Ферми.

На рис.1.2. иллюстрируется эта модель, состоящая из 5-ти точечных масс

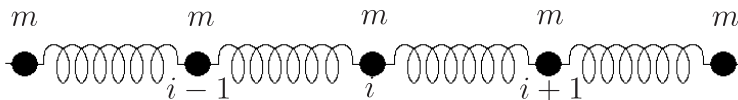


Рис. 1.2. Взаимодействие масс в модели Ферми, Паста и Улама

Движение i -й массы зависит от сил, действующих со стороны соседних масс, и описывается вторым законом Ньютона [60]

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{i,i+1} - F_{i-1,i}, \quad (1.4.1)$$

где в данном случае силу $F_{i-1,i}$ выберем в виде

$$F_{i-1,i} = k(\Delta l) + \alpha(\Delta l)^2 + \beta(\Delta l)^3, \quad \Delta l = y_i - y_{i-1}. \quad (1.4.2)$$

Здесь y_i — координата положения равновесия i -й массы. По сравнению с задачей Ферми—Паста—Улама в данной модели предполагается, что существует еще дополнительное слагаемое $\beta(\Delta l)^3$. Мартин Крускал и Норман Забуски в своих первоначальных расчетах использовали уравнения (1.4.1) и (1.4.2) при $\beta = 0$.

В уравнении (1.4.2) перейдем к непрерывно распределенным массам, полагая

$$y_{i\pm 1} = y_i \pm hy_{i,x} + \frac{h^2}{2}y_{i,xx} \pm \frac{h^3}{6}y_{i,xxx} + \frac{h^4}{24}y_{i,xxxx}. \quad (1.4.3)$$

Тогда после подстановки (1.4.2) и (1.4.3) в (1.4.1) получаем с точностью до $o(h^4)$ уравнение в виде

$$y_{tt} = \frac{kh^2}{m}y_{xx} + \frac{kh^4}{12m}y_{xxxx} + \frac{2\alpha h^3}{m}y_x y_{xx} + \frac{3\beta h^4}{m}y_x^2 y_{xx}. \quad (1.4.4)$$

В (1.4.4) введем обозначения

$$c^2 = \frac{kh^2}{m}, \quad \varepsilon = \frac{2h}{k}, \quad \delta = \frac{kh}{24}, \quad \gamma = \frac{36\beta}{k},$$

тогда оно запишется в виде

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + \varepsilon \delta c^2 y_{xxxx} + \alpha \varepsilon c^2 y_x y_{xx} + \gamma \varepsilon \delta c^2 y_x^2 y_{xx}. \quad (1.4.5)$$

При $\gamma = 0$ из (1.4.5) приходим к уравнению, которое получено в 1872 году Буссинеском для описания волн на воде.

Возмущения, описываемые уравнением (1.4.5), на начальной стадии удовлетворяют линейному волновому уравнению

$$y_{tt} = c^2 y_{xx}, \quad (1.4.6)$$

поэтому начальное возмущение распадается на две волны, одна из которых распространяется влево, а другая — вправо.

Для изучения одной из этих волн решение уравнения (1.4.5) будем искать в виде [60]

$$y = f(z, T) + \varepsilon y_1(x, t), \quad (1.4.7)$$

где

$$z = x - ct, \quad T = \varepsilon t,$$

а $f(z, T)$ соответствует профилю волны на больших расстояниях при $T \sim 1/\varepsilon$.

Из уравнения (1.4.5), принимая во внимание (1.4.7), получаем с точностью до ε

$$y_{1tt} - c^2 y_{1xx} \equiv 2cf_{zT} + \delta c^2 f_{zzzz} + \alpha c^2 f_z f_{zz} + \gamma \delta c^2 f_z^2 f_{zz}. \quad (1.4.8)$$

Для того чтобы зависимость $y_1(x, t)$ асимптотически не возрастала при изменении переменной $\theta = x + ct$, для $f(z, T)$ должно выполняться равенство

$$2f_{zT} + \alpha c f_z f_{zz} + \gamma \delta f_z^2 f_{zz} + \delta^2 c f_{zzzz} = 0. \quad (1.4.9)$$

Предположим также, что

$$\tau = \frac{cT}{2}, \quad u = f_z,$$

тогда из (1.4.9) получаем уравнение

$$u_\tau + \alpha u u_z + \gamma \delta u^2 u_z + \delta u_{zzz} = 0. \quad (1.4.10)$$

При $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ из (1.4.10) мы снова приходим к уравнению Кортевега—де Вриза, совпадающее с тем, которое мы получили для описания волн на воде. Если $\gamma \neq 0$, но $\alpha = 0$, то из (1.4.10)

получаем уравнение, которое носит название *модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза*

$$u_{\tau} + \gamma \delta u^2 u_z + \delta u_{zzz} = 0. \quad (1.4.11)$$

Предложенный вывод уравнения (1.4.10) был сделан Крускалом и Забуски при $\gamma = 0$ после численного решения (1.4.1) при периодических граничных условиях. Авторы первые установили, что уравнение, используемое Ферми, Паста и Уламом при уменьшении расстояния между массами и при неограниченном росте их числа переходит в уравнение Кортевега—де Вриза, предложенное в 1895 году для описания уединенной волны на воде.

В те же годы было показано, что при описании ионно-звуковых волн в плазме также появляется уравнение Кортевега—де Вриза. Стало ясно, что это уравнение возникает во многих областях физики, и, следовательно, уединенная волна, которая описывается этим уравнением, является широко распространенным явлением. Продолжая вычислительные эксперименты по моделированию процесса распространения таких волн, Крускал и Забуски рассмотрели их столкновение [155].

Остановимся на обсуждении этого важного факта. Рассмотрим две уединенные волны, описываемые уравнением Кортевега—де Вриза, которые отличаются амплитудами и которые движутся друг за другом в одном направлении (рис. 1.3.). Из формулы для скорости распространения уединенных волн следует, что скорость больше, если выше амплитуда волн, а ширина пика уменьшается с ростом амплитуды. Таким образом, более высокие уединенные волны движутся быстрее. Волна с большей амплитудой догонит движущуюся впереди волну с меньшей амплитудой. Далее в течение некоторого времени две волны будут двигаться вместе как единое целое, взаимодействуя между собой, а затем они разъединятся. Замечательным свойством этих уединенных волн является то, что после своего взаимодействия форма и скорость этих волн сохраняются. Обе волны после столкнове-

ния лишь смещаются на некоторое расстояние по сравнению с тем расстоянием, на котором они двигались бы без взаимодействия.

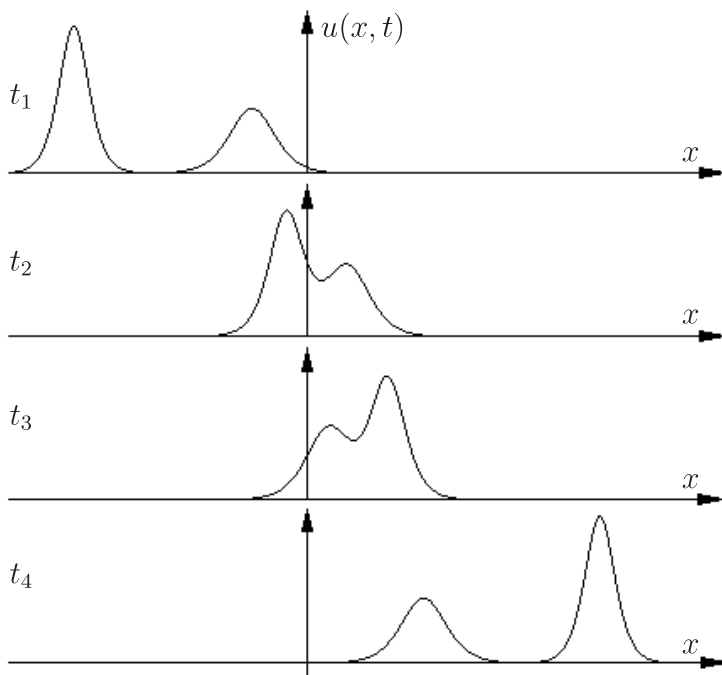


Рис. 1.3. Взаимодействие солитонов Кортевега—де Вриза. В момент времени t_1 уединенная волна меньшей амплитуды впереди. Однако эта волна движется с меньшей скоростью, чем больший солитон. При t_2 и t_3 солитоны взаимодействуют. При t_4 солитоны расходятся, большая уединенная волна уходит вперед

Процесс, в результате которого после взаимодействия волн сохраняются их форма и скорость, напоминает упругое столкновение частиц. Поэтому Крускал и Забуски называли такие уединенные волны *солитонами* (от английского слова *solitary*, означающее уединенный). Это специальное название уединенных волн, созвучное электрону, протону и названиям многих других эле-

ментарных частиц, в настоящее время — общепринято.

Уединенные волны, которые были открыты Джоном Расселом, и в самом деле ведут себя как частицы. Оказалось, что большая волна не проходит через малую при их взаимодействии. Когда уединенные волны соприкасаются, то большая волна замедляется и уменьшается, а та волна, которая была малой — наоборот ускоряется и подрастает. Когда малая волна дорастает до размеров большой, а большая уменьшается до размеров малой, солитоны разделяются, и больший уходит вперед. Таким образом, солитоны ведут себя, как упругие теннисные мячи.

Итак: *Солитоном называется нелинейная уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при движении и при столкновении с любыми другими уединенными волнами. Единственным результатом взаимодействия солитонов может быть некоторый сдвиг фаз* [1, 20, 39, 60].

Открытия, связанные с уравнением Кортевега—де Вриза, не закончились на открытии солитона. Следующим важным этапом, имеющим отношение к этому уравнению, было открытие нового метода решения задачи Коши для нелинейных уравнений в частных производных. Известно, что найти решения нелинейных уравнений очень сложно. До 60-х годов прошлого столетия считалось, что такие уравнения могут иметь только некоторые частные решения, удовлетворяющие специально заданным начальным условиям. Однако уравнение Кортевега—де Вриза и в этом случае оказалось в исключительном положении.

В 1967 году американские физики Гарднер, Грин, Крускал и Миура показали [99], что решение задачи Коши для уравнения Кортевега—де Вриза может быть, в принципе, получено при всех начальных условиях, которые обращаются в нуль по определенному закону при стремлении координаты к бесконечности. Авторы преобразовали уравнение Кортевега—де Вриза к системе двух уравнений, называемой теперь парой Лакса (по имени американского математика Питера Лакса, внесшего большой вклад в развитие теории солитонов [134]), и открыли новый метод (на-

зывается методом обратной задачи рассеяния) решения задачи Коши для ряда нелинейных уравнений в частных производных.

1.5. Иерархия модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза

Модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза (1.4.11) относится к так называемой иерархии модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза, имеющей вид:

$$v_t + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) L_n[v_x - v^2] = 0, \quad (1.5.1)$$

где оператор $L_n[v_x - v^2]$ является оператором Ленарда, определенным выражением (1.2.2).

В случае $n = 1$ из иерархии (1.5.1) получаем модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза:

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0. \quad (1.5.2)$$

При $n = 2$ из (1.5.1) имеем уравнение пятого порядка [121, 123]:

$$v_t - 10v^2 v_{xxx} - 40v_x v_{xx} - 10v_x^3 + 30v^4 v_x + v_{xxxxx} = 0. \quad (1.5.3)$$

Уравнение (1.5.3) также встречается при описании волн на воде [140]. Многое из сказанного выше об уравнении Кортевега—де Вриза пятого порядка можно отнести и к модифицированному уравнению пятого порядка. Уравнение (1.5.3) проходит тест Пенлеве и имеет решения в виде солитонов, как и все уравнения иерархии (1.5.1). Задача Коши для (1.5.3) и для иерархии (1.5.1) решается методом обратной задачи рассеяния.

1.6. Уравнение Буссинеска

Полагая $\gamma = 0$ в уравнении (1.4.5), имеем

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + \varepsilon \delta c^2 y_{xxxx} + \alpha \varepsilon c^2 y_x y_{xx}. \quad (1.6.1)$$

Дифференцируя уравнение (1.6.1) по x и обозначая

$$y_x = u, \quad \tau = ct, \quad \beta = \varepsilon \delta, \quad \sigma = \alpha \varepsilon, \quad (1.6.2)$$

получаем уравнение Буссинеска

$$u_{tt} = u_{xx} + \sigma (u^2)_{xx} + \beta u_{xxx}. \quad (1.6.3)$$

Уравнение (1.6.3) было открыто Буссинеском в 1871 году для описания длинных волн на мелкой воде [87]. Это уравнение проходит тест Пенлеве и задача Коши для него решается методом обратной задачи рассеяния. По существу уравнение (1.6.3) описывает те же волновые процессы, что и уравнение Кортевега—де Вриза, и иногда возникает вопрос о том, какое из этих уравнений использовать лучше. По-видимому, уравнение Кортевега—де Вриза использовать предпочтительней, поскольку оно учитывает одну из волн, бегущую вправо или влево, и это описание ни чем не хуже, чем описание с помощью уравнения Буссинеска. Однако уравнение Буссинеска сложнее, чем уравнение Кортевега—де Вриза. Это обстоятельство неоднократно отмечалось Мартином Крускалом.

1.7. Фазовая и групповая скорости волн

Выше мы уже неоднократно говорили о скорости волны. Однако скорость, по очень тонкому замечанию Л.И. Мандельштама, — это «понятие, возникшее при описании движения частицы». Когда говорится о скорости волны, то перемещения частиц в ней, как правило, нет, а если и есть, как, например, на воде, то

оно происходит по иным законам, чем движение самой поверхности воды. Однако о скорости волны часто говорят, имея в виду перемещение максимума (или минимума) при распространении волны.

Рассмотрим стандартное волновое уравнение

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (1.7.1)$$

Введем новую функцию $v(x, t)$ в соответствии с формулой

$$v_t = c u_x. \quad (1.7.2)$$

Тогда, принимая во внимание (1.7.1), получаем

$$u_t = c v_x. \quad (1.7.3)$$

Складывая и вычитая правые и левые части уравнений (1.7.2) и (1.7.3), получаем систему уравнений:

$$f_t - c f_x = 0, \quad f = \frac{1}{2} (u + v); \quad (1.7.4)$$

$$g_t + c g_x = 0, \quad g = \frac{1}{2} (u - v). \quad (1.7.5)$$

Система уравнений (1.7.4) и (1.7.5) показывает, что исходное волновое уравнение (1.7.1) может быть представлено в виде эквивалентной системы уравнений (1.7.4) и (1.7.5). Поэтому при анализе волновых движений уравнения (1.7.4) и (1.7.5) часто рассматриваются отдельно. Именно это обстоятельство использовано в пп. 1.1 и 1.3 при выводе одноволновых приближений, описываемых уравнениями Кортевега—де Вриза. Из системы уравнений (1.7.4), (1.7.5) находится решение задачи Коши исходного волнового уравнения (1.7.1), впервые полученное Даламбером. Это решение представляется в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct), \quad (1.7.6)$$

Вид функций f и g определяется начальными условиями

$$u(x, t = 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, t = 0) = \psi(x). \quad (1.7.7)$$

Рассмотрим решение волнового уравнения (1.7.1) при начальных условиях

$$u(x, t = 0) = a \cos(kx), \quad u_t(x, t = 0) = a\omega \sin(kx),$$

где a, k и ω — постоянные. Искомое решение выражается зависимостью:

$$u(x, t) = a \cos(kx - \omega t), \quad (1.7.8)$$

которая представляет собой монохроматическую волну, бегущую направо со скоростью

$$c = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k}.$$

Эта скорость называется *фазовой скоростью волны*, поскольку характеризует скорость перемещения максимума одной волны (фазы).

Однако на практике реализовать процесс распространения монохроматической волны затруднительно, и поэтому обычно имеют дело с группой (пакетом) волн. В этом случае возникает естественный вопрос об определении скорости волн, при распространении волнового пакета.

В качестве примера рассмотрим процесс распространения двух волн, которые являются решениями волнового уравнения (1.7.1) [13]:

$$u_1(x, t) = a \cos(kx - \omega t), \quad (1.7.9)$$

$$u_2(x, t) = a \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]. \quad (1.7.10)$$

Волновые числа и частоты этих двух волн отличаются, соответственно, на небольшие величины Δk и $\Delta \omega$. Поскольку решение, описывающее каждую из этих волн, удовлетворяет волновому уравнению (1.7.1), то в силу линейности уравнения, ему будет удовлетворять и сумма решений [13]

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = 2a \cos \frac{1}{2}(x\Delta k - t\Delta \omega) \times \\ \times \cos \left\{ \left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right\}. \quad (1.7.11)$$

Из последней формулы видно, что суммарная амплитуда волн

$$A(x, t) = 2a \cos \left\{ \frac{1}{2} (x\Delta k - t\Delta \omega) \right\} \quad (1.7.12)$$

с течением времени меняется. Итоговая картина, которая получается при сложении двух волн, представлена на рис. 1.4.

Скорость распространения волн в этом случае может быть вычислена как скорость распространения максимума суммарной амплитуды волн

$$V_g = \frac{x}{t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}.$$

Когда мы имеем дело с волновым пакетом из нескольких волн, то *групповая скорость* равна производной от частоты по волновому числу k

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta k}.$$

Решением волнового уравнения (1.7.1) является также зависимость от x и t в виде

$$u = a e^{i(kx + \omega t)}, \quad (1.7.13)$$

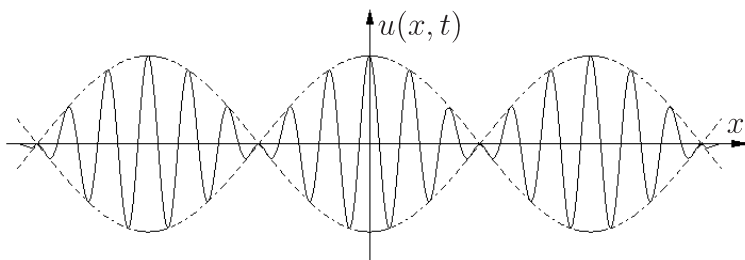


Рис. 1.4. Распространение волнового пакета из двух волн, волновые числа которых отличаются на величину Δk

где i — мнимая единица, ω — частота, k — волновое число, a — амплитуда. Для линейных уравнений множитель a сокращается и, вообще говоря, может быть выбран произвольным.

Зависимость между ω и k называется *дисперсионным соотношением*, и ее задание позволяет восстановить уравнение, которым описывается волновой процесс.

Рассмотрение диспергирующих одномерных систем ограничивают случаями, при которых зависимость $\omega = \omega(k)$ является функцией действительной переменной и $\omega_{kk} \neq 0$.

Подставляя (1.7.13) в уравнение (1.7.1) находим

$$\omega = \pm ck.$$

Откуда следует, что для волн, описываемых уравнением (1.7.1), фазовая скорость

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \pm c$$

и групповая скорость

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \pm c$$

совпадают. Никакой дисперсии (зависимости скорости волны от ее длины) в данном случае нет.

Рассмотрим теперь уравнение

$$U_t + U_{xxx} = 0, \quad (1.7.14)$$

являющееся линейной частью уравнения Кортевега—де Вриза, и найдем зависимость $\omega(k)$. Подставляя (1.7.13) в (1.7.14), получаем

$$\omega = k^3.$$

Фазовая скорость для волны в этом случае зависит от волнового числа

$$V_p = \frac{\omega}{k} = k^2.$$

Групповая скорость для волнового пакета, описываемого уравнением (1.7.14), дается формулой

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = 3k^2.$$

Мы получили, что групповая скорость волны для решения уравнения (1.7.14), в три раза больше, чем фазовая скорость волнового пакета. Видно, что в дисперсионной среде фазовая и групповая скорости волн не совпадают. Если в начальный момент времени волновой пакет был локализован, то с течением времени он будет расплываться (диспергировать). Поэтому слагаемое с третьей производной в уравнении Кортевега—де Вриза называют дисперсионным. Это слагаемое приводит к расплыванию волны. Однако мы знаем, что уравнение Кортевега—де Вриза имеет решения в виде уединенной волны, переносимой с постоянной скоростью и без каких-либо изменений формы. Тем не менее противоречий со сказанным выше об уединенной волне нет, поскольку в уравнении Кортевега—де Вриза, в отличие от его линейного аналога (1.7.14), существует еще нелинейное слагаемое uu_x , которое «уравновешивает» влияние дисперсии.

1.8. Нелинейное уравнение Шредингера для огибающей волнового пакета

Выше мы говорили, что на практике волны, как правило, распространяются группами. Подобные группы волн на воде люди могли наблюдать с незапамятных времен. На вопрос о том, почему для волн на воде так типичны «стаи» волн, удалось ответить Т. Бенджамену и Дж. Фейеру только в 1967 году. Путем теоретических расчетов они показали, что простая периодическая волна на глубокой воде неустойчива (теперь это явление называется неустойчивостью Бенджамена—Фейера), и поэтому волны на воде из-за неустойчивости разбиваются на группы. Уравнение, с помощью которого описывается процесс распространения групп волн на воде, было получено В.Е. Захаровым в 1968 году.

Естественно, что процесс распространения волнового пакета в различных средах может описываться многими нелинейными уравнениями в частных производных, однако здесь для простоты мы предположим, что этот процесс описывается модифицированным уравнением Кортевега—де Вриза [60]

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.8.1)$$

Предположим также, что x и t в (1.8.1) — пространственная и временная переменные для несущей волны. Можно ввести набор «медленных» временной и пространственной переменных, которые описывают движение огибающей волнового пакета и рассматривать эти переменные как независимые. При этом имеем

$$X_0 = x, \quad X_1 = \varepsilon x, \quad T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t. \quad (1.8.2)$$

Здесь ε — малый параметр, который соответствует характеристикам (длине и времени) огибающей волнового пакета.

Многие уравнения, описывающие нелинейные волны, имеют решения в виде гармонических волновых пакетов

$$u = a \exp \{ i [kx + \omega(k)t] \}$$

в предположении, что их амплитуда является малой. Предположим, что основное состояние системы описывается линейной гармоникой, хотя малой по амплитуде, но не пренебрежимо малой из-за эффекта нелинейности. В силу (1.8.2) мы рассматриваем случай, когда огибающая волнового пакета меняется медленно, как по пространственной, так и по временной переменной по сравнению с характеристиками несущей волны.

Решение уравнения (1.8.1) будем искать в виде суммы нескольких волн u_0, u_1 и u_2 в соответствии с методом многих масштабов [1, 39, 60]

$$u = \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots). \quad (1.8.3)$$

Операторы дифференцирования по x и t при этом заменяются на следующие:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}, \quad (1.8.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}.$$

В соответствии с (1.8.3) имеем

$$u(x, t, \varepsilon) = u(T_0, T_1, T_2, X_0, X_1). \quad (1.8.5)$$

Подставляя (1.8.3), (1.8.4) в (1.8.1) и учитывая (1.8.5), после приравнивания нулю выражений при одинаковых степенях ε получаем цепочку уравнений

$$\frac{\partial u_0}{\partial T_0} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial X_0^3} = 0, \quad (1.8.6)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial T_0} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^3} + \frac{\partial u_0}{\partial T_1} + 3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial X_1 \partial X_0^2} = 0, \quad (1.8.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial T_0} + \frac{\partial u_1}{\partial T_1} + \frac{\partial u_0}{\partial T_2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_0^3} + u_0^2 \frac{\partial u_0}{\partial X_0} + \\ + 3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial X_0 \partial X_1^2} + 3 \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^2 \partial X_1} = 0. \end{aligned} \quad (1.8.8)$$

Решением уравнения (1.8.6) является функция

$$u_0 = a(X_1, T_1, T_2) e^{i\theta} + a^*(X_1, T_1, T_2) e^{-i\theta}, \quad (1.8.9)$$

где

$$\theta = kX_0 + \omega T_0, \quad \omega = k^3, \quad (1.8.10)$$

a^* — комплексно-сопряженная функция от a .

Учитывая (1.8.9), из (1.8.7) получаем

$$\frac{\partial u_1}{\partial T_0} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^3} = - \left(\frac{\partial a}{\partial T_1} - 3k^2 \frac{\partial a}{\partial X_1} \right) e^{-i\theta} + \text{к.с.} \quad (1.8.11)$$

Поскольку групповая скорость волны определяется формулой

$$\frac{d\omega}{dk} = 3k^2,$$

а амплитуда волны распространяется с групповой скоростью, то из (1.8.11) следует, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial T_0} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^3} = 0. \quad (1.8.12)$$

Отсюда следует, что в качестве решения для u_1 можно взять

$$u_1 = 0.$$

Рассмотрим теперь уравнение (1.8.8). Подставляя в него $u_1 = 0$ и u_0 из (1.8.9), приходим к выражению

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial T_0} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_0^3} = & - \left(\frac{\partial a}{\partial T_2} e^{i\theta} + \frac{\partial a^*}{\partial T_2} e^{-i\theta} \right) - \\ & - ik \left(a e^{i\theta} - a^* e^{-i\theta} \right) \left(a e^{i\theta} + a^* e^{-i\theta} \right)^2 - 3ik \left(\frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2} e^{i\theta} - \frac{\partial^2 a^*}{\partial X_1^2} e^{-i\theta} \right), \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial T_0} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_0^3} = & -ika^3 e^{3i\theta} + ika^{*3} e^{-3i\theta} - \\ & - \left(\frac{\partial a}{\partial T_2} + 3ik \frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2} + ika^2 a^* \right) e^{i\theta} + \\ & + \left(\frac{\partial a^*}{\partial T_2} - 3ik \frac{\partial^2 a^*}{\partial X_1^2} - ika^{*2} a \right) e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (1.8.13)$$

Из последнего уравнения следует, что решение

$$u_2 \cong -ika^3 e^{3i\theta} + ika^{*3} e^{-3i\theta}$$

удовлетворяет (1.8.13) тогда и только тогда, когда амплитуда волнового пакета описывается уравнениями

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} + 3ik \frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2} + ika^2 a^* = 0, \quad (1.8.14)$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial T_2} - 3ik \frac{\partial^2 a^*}{\partial X_1^2} - ik(a^*)^2 a = 0.$$

Таким образом, получаем, что амплитуда волны $a(X_1, T_2)$ описывается уравнением

$$i \frac{\partial a}{\partial T_2} = 3k \frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2} + ka|a|^2. \quad (1.8.15)$$

Поскольку структура этого уравнения совпадает со структурой уравнения Шредингера, в котором выражение $|a|^2$ играет роль потенциала, то это уравнение называется *нелинейным уравнением Шредингера*.

Аналогичное уравнение для огибающей волнового пакета можно получить при рассмотрении процесса распространения группы волн, описываемых некоторыми другими нелинейными уравнениями [60].

Нелинейное уравнение Шредингера, как и уравнение Кортевега—де Вриза, также широко распространено при описании волн в различных областях физики. Впервые это уравнение было предложено в 1926 году австрийским физиком Э. Шредингером для анализа фундаментальных свойств квантовых систем, и первоначально с его помощью описывались процессы взаимодействия внутриатомных частиц. Обобщенное, или нелинейное, уравнение Шредингера описывает целую совокупность явлений в физике волновых процессов. В частности, известны многочисленные примеры волновых явлений в нелинейной оптике, где используется нелинейное уравнение Шредингера [1, 57, 66].

1.9. Уравнение Гинзбурга—Ландау

Уравнение Гинзбурга—Ландау возникает при описании большого класса нелинейных волновых явлений в пространственно распределенных системах. Оно имеет вид [81]

$$A_t = (1 + ib) \Delta A + \varepsilon A - (1 - ic) |A|^2 A, \quad (1.9.1)$$

где $A(x, t)$ — комплексная функция, зависящая от \vec{x} и t . Параметры b и c характеризуют линейную и нелинейную дисперсию математической модели.

При $b = c$ уравнение (1.9.1) с учетом замены $A \rightarrow A \exp \{ibt\}$ приводится к виду:

$$A_t = (1 + ib) (A + \Delta A + |A|^2 A). \quad (1.9.2)$$

Это уравнение может быть записано в виде

$$\Phi_t = -\frac{2}{1+b^2} \int |A_t|^2 d\vec{x}, \quad (1.9.3)$$

с использованием вариации функционала [81]

$$\Phi = \int U d\vec{x}, \quad U = -|A|^2 + \frac{1}{2}|A|^4 + |\nabla A|^2. \quad (1.9.4)$$

В случае одной пространственной переменной уравнение (1.9.1) принимает вид:

$$A_t = (1 + ib) A_{xx} + \varepsilon A - (1 - ic) |A|^2 A. \quad (1.9.5)$$

В пределе при $b \rightarrow \infty$ и $c \rightarrow \infty$ уравнение (1.9.2) переходит в нелинейное уравнение Шредингера.

Считается, что уравнение (1.9.5) впервые появилось в работе В.И. Гинзбурга и Л.Д. Ландау при разработке микроскопической теории сверхпроводимости [17]. Однако общепринятая запись уравнения (1.9.1) появилась в работе Ньюэлла и Вайтхедта [139].

При описании групповых свойств волновых пакетов уравнение Гинзбурга—Ландау популярно в такой же степени, как и нелинейное уравнение Шредингера. Обзор физических приложений уравнения Гинзбурга—Ландау можно найти в статье [81]. Уравнение (1.9.1) появляется при описании многочисленных явлений физики фазовых переходов, в теории сверхпроводимости, в теории сверхтекучести, а также при описании неравновесных процессов, характерных для открытых систем [96, 132]. Как и уравнение Курамото—Сивашинского, оно встречается при описании турбулентных процессов. В отличие от нелинейного уравнения Шредингера уравнение (1.9.1) не относится к классу точно

решаемых нелинейных уравнений. Задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния. Уравнение не проходит тест Пенлеве, не имеет солитонных решений, но имеет небольшой набор частных решений [14, 44, 106].

1.10. Уравнение sin-Гордона для описания дислокаций в твердом теле

В любой кристаллической структуре каждый атом окружен ближайшими соседями. В результате возникает условие равновесия кристаллической решетки. Если это условие нарушается, то происходят изменения в решетке, при которых у атомов появляется иное число соседей или изменяется расстояние до ближайших соседей. В кристаллических телах это обстоятельство приводит к дефектам, которые всегда имеются в реальных твердых телах.

Многие свойства кристаллической структуры (например, плотность и удельная теплоемкость) слабо зависят от наличия дефектов. Однако дефекты кристалла оказывают сильное влияние, например, на прочность и электропроводность, поэтому изучение поведения дефектов является важной задачей.

Существует несколько типов кристаллических дефектов. Далее остановимся на рассмотрении точечных дефектов, к которым относятся нарушения в решетке в изолированных друг от друга точках кристалла. Примерами таких дефектов являются вакансии, атомы внедрения или изолированные включения примеси.

Внедрение атома в решетку может произойти за счет ухода атома из узла решетки непосредственно в междоузлие в результате флуктуаций. При этом в оставленном узле возникает вакансия. Такие дефекты называются дефектами по Френкелю. Кроме точечных дефектов, возникающих в результате тепловых флукту-

аций, могут появиться точечные дефекты иного происхождения. В частности, один из методов увеличения количества дефектов состоит в бомбардировке твердого тела атомами или частицами с высокой энергией путем нейтронного облучения в ядерном реакторе. В результате облучения быстрые частицы соударяются с атомами решетки и смещают их, образуя при этом также дефекты по Френкелю.

Пусть имеется простейшая кристаллическая структура, состоящая из слоев атомов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Рассмотрим математическую модель поведения точечного дефекта в кристаллической структуре твердого тела, предложенную Я.И. Френкелем и Т.А. Конторовой в 1926 году [71]. Дефекты, рассматриваемые в модели Френкеля и Конторовой, иногда называются дислокациями, однако заметим, что в настоящее время под дислокацией понимается более сложное несовершенство кристаллической структуры, чем любой из точечных дефектов [74].

Предположим, что атомы в кристаллической структуре движутся по прямой вдоль оси x , направленной перпендикулярно атомным слоям, и, следовательно, все силы, действующие на атомы также направлены вдоль оси x . Влияние соседних атомных слоев на отдельный атом можно описать периодическим потенциалом [74]

$$V(x) = A \left[1 - b \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \right], \quad b < 1 \quad (1.10.1)$$

где x — координата, a — шаг кристаллической решетки, A и b — постоянные, характеризующие потенциал. Обозначая отклонение n -го атома от положения равновесия в виде

$$y_n(t) = x_n(t) - na, \quad (1.10.2)$$

где $x_n(t)$ — координата n -го атома, находим, что на n -й атом со стороны атомных слоев действует сила

$$f(y_n) = -\frac{2\pi Ab}{a} \sin\left(\frac{2\pi y_n}{a}\right). \quad (1.10.3)$$

Возможным случаем дислокации в твердом теле является дырка, которая перемещается в нем из-за перескока атомов.

Если в кристаллической структуре дефект отсутствует, то равновесная конфигурация в модели соответствует такому состоянию, что в каждой впадине потенциала (1.10.1) находится один атом. Однако в случае положительной (или отрицательной) дислокации, когда число частиц меньше (или больше) их первоначального количества, равновесная конфигурация нарушается и возникает новая, аналог которой представлен на рис. 1.5.

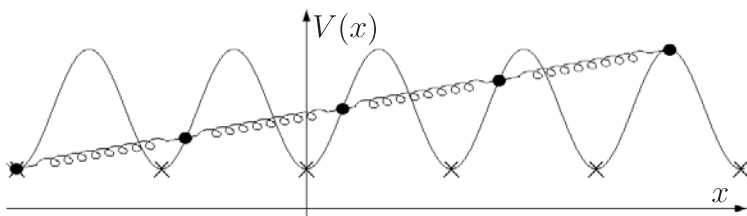


Рис. 1.5. Возникновение дислокации в модели Френкеля—Конторовой при удалении одного из атомов в кристаллической структуре

Соседние атомы, находящиеся в равновесной конфигурации, при дислокации также взаимодействуют друг с другом. На рис. 1.5 такое взаимодействие иллюстрируется пружинками, а крестиками изображено положение атомных слоев.

Аналогом предложенной Френкелем и Конторовой модели дислокаций является периодическая последовательность ложбинок и горков, которые представлены на рис. 1.5. В равновесной конфигурации во всех ложбинках лежат шарики, которые соединены пружинками. Если один из шариков вместе с пружинкой удаляется (или, наоборот, один из шариков вместе с пружинкой добавляется), то равновесная конфигурация нарушается, и си-

стема, соединенная пружинками, придет в движение. Из-за связи между собой шарики сместятся и уже не будут находиться строго в ложбинках.

Уравнение движения n -го атома с учетом потенциала (1.10.1) и в предположении, что пружинки действуют на n -й атом с силой, пропорциональной разности отклонений от положения равновесия, запишется в виде

$$my_{n,tt} = -\frac{2\pi Ab}{a} \sin\left(\frac{2\pi y_n}{a}\right) + \frac{k}{h^2} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}), \quad (1.10.4)$$

где m — масса частицы, k — коэффициент пропорциональности в силе, действующей между соседними атомами, h — расстояние между атомами.

Переходя в (1.10.4) к непрерывно распределенным массам при условии, что расстояние между атомами стремится к нулю, а их число — к бесконечности, получаем уравнение

$$my_{n,tt} = -\frac{2\pi Ab}{a} \sin\left(\frac{2\pi y_n}{a}\right) + k (y_n)_{xx}. \quad (1.10.5)$$

Введем обозначения

$$\varphi = \frac{2\pi y_n}{a}, \quad t' = \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{Ab}{m}} \cdot t, \quad x' = \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{Ab}{k}} x \quad (1.10.6)$$

(далее штрихи опускаем), тогда (1.10.5) приводится к виду

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0. \quad (1.10.7)$$

Это уравнение носит название уравнения sin-Гордона. Название звучит несколько странно, но оно связано с тем, что при малых значениях φ уравнение (1.10.7) переходит в уравнение Клейна—Гордона

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \varphi = 0.$$

Подобное укороченное название, придуманное Мартином Крускалом, как раз и породило название \sin -Гордона для уравнения (1.10.7).

Заметим, что если использовать в уравнении (1.10.7) замену переменных

$$\begin{aligned}x &= \xi + \tau \\ t &= \tau - \xi,\end{aligned}$$

то уравнение \sin -Гордона примет вид

$$u_{\xi\tau} = \sin u. \quad (1.10.8)$$

Такая запись уравнения \sin -Гордона является также широко распространенной.

Уравнение (1.10.7) так же, как и выше приведенные уравнения Кортевега—де Вриза и нелинейное уравнение Шредингера, широко используются при описании многих явлений в физике.

Впервые это уравнение появилось в дифференциальной геометрии как точная модель описания поверхности постоянной отрицательной кривизны. Изучению этого вопроса была посвящена работа А. Бэклунда в 1980 году, в которой показано, что первая фундаментальная квадратичная форма при постоянной отрицательной кривизне преобразуется к уравнению \sin -Гордона [1, 75].

Это уравнение используется также при анализе свойств элементарных частиц и при теоретическом описании эффекта самоиндуцированной прозрачности. Этот удивительный эффект был открыт в работе Маккола и Хана в 1965 году при изучении процесса распространения ультракоротких импульсов электромагнитного излучения в рубиновом стержне [1, 57, 59, 138]. Самоиндуцированная прозрачность возникает при взаимодействии электромагнитного излучения с диэлектриком на частоте, близкой к

резонансной. Самый простой случай возникновения эффекта реализуется для диэлектрика, состоящего из двухуровневых атомов, каждый из которых имеет основное и возбужденное состояние. Если в начальный момент атомы находятся в основном состоянии, то под действием электромагнитного излучения они переходят в возбужденное состояние, поглощая энергию ультракоротких импульсов и возвращая ее полностью обратно при вынужденном переходе в исходное состояние [57, 138]. При этом, взаимодействуя с импульсом электромагнитного излучения, атомы вещества остаются в основном состоянии, и суммарной передачи энергии от излучения к веществу не происходит. Импульс распространяется в среде, которая для него становится прозрачной, что и послужило поводом назвать этот эффект *самоиндуцированной прозрачностью*.

1.11. Нелинейное уравнение переноса и уравнение Бюргерса

Одним из самых простых по внешнему виду уравнений является *нелинейное уравнение переноса* [39, 64]

$$u_t + uu_x = 0. \quad (1.11.1)$$

Уравнение (1.11.1) имеет нелинейное слагаемое, аналогичное слагаемому в уравнении Кортевега—де Вриза.

Решение задачи Коши для уравнения (1.11.1) в настоящее время хорошо известно. Это решение обладает рядом свойств, не характерных для линейных уравнений [4, 64].

Пусть в начальный момент времени задано начальное возмущение

$$u(x, t = 0) = \psi(x). \quad (1.11.2)$$

Решение уравнения (1.11.1) с условием (1.11.2) находится методом характеристик. Предположим, что решение задачи является гладкой функцией. Пусть $x = \varphi(t)$ определяется из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t = 0). \quad (1.11.3)$$

Эти линии являются *характеристиками* уравнения (1.11.1). Решение вдоль каждой характеристики может зависеть от t , поэтому получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.11.4)$$

Вдоль характеристики решение постоянно. В силу (1.11.3) характеристики являются прямыми линиями

$$x = \psi(x_0)t + x_0, \quad (1.11.5)$$

где x_0 — абсцисса точки, из которой выпускается характеристика; $\psi(x_0)$ — коэффициент, характеризующий наклон прямой к оси ординат. Таким образом, начальное условие (1.11.2) задает картину характеристик и значения решения в каждой точке плоскости (x, t) . При монотонном возрастании функции $\psi(x_0)$ с ростом x_0 угол наклона функции к оси ординат увеличивается, а характеристики не пересекаются. Однако для убывающей функции с ростом x_0 характеристики будут пересекаться в некоторый момент времени. Возникает вопрос о выборе однозначного решения при пересечении характеристик. Этот выбор можно сделать, принимая во внимание закон сохранения для уравнения (1.11.1). Заметим, что это уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0. \quad (1.11.6)$$

Дифференцируемые решения уравнений (1.11.1) и (1.11.6) удовлетворяют уравнению

$$\oint_G u dx - \frac{1}{2} u^2 dt = 0, \quad (1.11.7)$$

где G — произвольный контур лежащий в полуплоскости $t > 0$. Пусть L — произвольный участок линии разрыва в контуре, тогда из (1.11.7) на этой линии получаем соотношение:

$$\int_L \left([u] \frac{dx}{dt} - \frac{1}{2} [u^2] \right) dt = 0, \quad (1.11.8)$$

где $[F]$ обозначает скачок характеристики F на L :

$$[F] = F_p - F_l. \quad (1.11.9)$$

Поскольку L — произвольный участок линии разрыва, то из (1.11.8) имеем

$$(u_p - u_l) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} (u_p^2 - u_l^2), \quad (1.11.10)$$

откуда получаем условие на линии разрыва

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} (u_p + u_l). \quad (1.11.11)$$

Линия разрыва является границей, через которую характеристики не переносят своих значений, и это обстоятельство позволяет построить для уравнения (1.11.1) обобщенное решение задачи Коши, которое остается однозначным. Заметим, что для уравнения (1.11.1) можно записать бесконечное число законов сохранения, аналогичных (1.11.7), и может показаться, что выбор линии разрыва становится также неоднозначным. Однако при выборе закона сохранения необходимо принимать во внимание принцип сохранения физических величин. Учет именно такого закона позволяет сделать правильный выбор обобщенного решения.

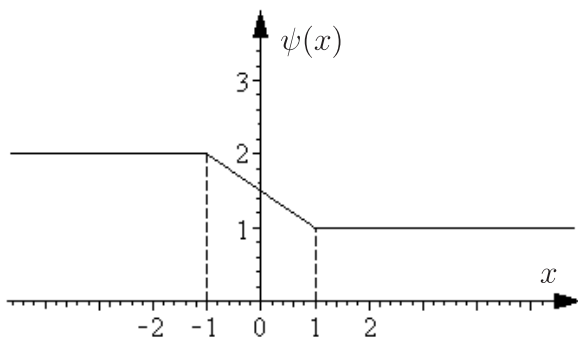


Рис. 1.6. Начальное возмущение (1.11.12) для нелинейного уравнения переноса (1.11.1)

Рассмотрим решение уравнения (1.11.1) с начальным условием (рис. 1.6.)

$$u(x, t = 0) = \psi(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1; \\ \frac{1}{2}(3 - x), & -1 < x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad (1.11.12)$$

Поскольку при $x_0 \leq -1$

$$\psi(x_0) = 2, \quad \frac{dx}{dt} = 2,$$

то получаем решение

$$u(x, t) = 2, \quad x \leq 2t - 1. \quad (1.11.13)$$

Принимая во внимание, что при $x_0 \geq 1$

$$\psi(x_0) = 1, \quad \frac{dx}{dt} = 1,$$

находим решение

$$u(x, t) = 1, \quad 1 + t \leq x. \quad (1.11.14)$$

Для промежуточной области имеем

$$\psi(x_0) = \frac{1}{2}(3 - x_0), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(3 - x_0),$$

откуда получаем

$$u(x, t) = \frac{3 - x}{2 - t}, \quad 2t - 1 \leq x \leq 1 + t. \quad (1.11.15)$$

В силу (1.11.11) линия разрыва определяется уравнением

$$x = \frac{3}{2}t, \quad t \geq 2, \quad x \geq 3. \quad (1.11.16)$$

Окончательно получаем решение при $x \leq 3$ в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x \leq 2t - 1; \\ \frac{3 - x}{2 - t}, & 2t - 1 < x < t + 1; \\ 1, & x \geq t + 1. \end{cases} \quad (1.11.17)$$

При $x \geq 3$ решение определяется формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x < \frac{3}{2}t; \\ 1, & x > \frac{3}{2}t. \end{cases}$$

Полученное решение иллюстрируется на рис. 1.7.

Остановимся на обсуждении обобщения уравнения (1.11.1) в виде

$$u_t + \alpha u u_x = \mu u_{xx}. \quad (1.11.18)$$

Уравнение (1.11.18) рассматривалось Дж. М. Бюргерсом [86] и носит название *уравнения Бюргерса*. Оно относится также к

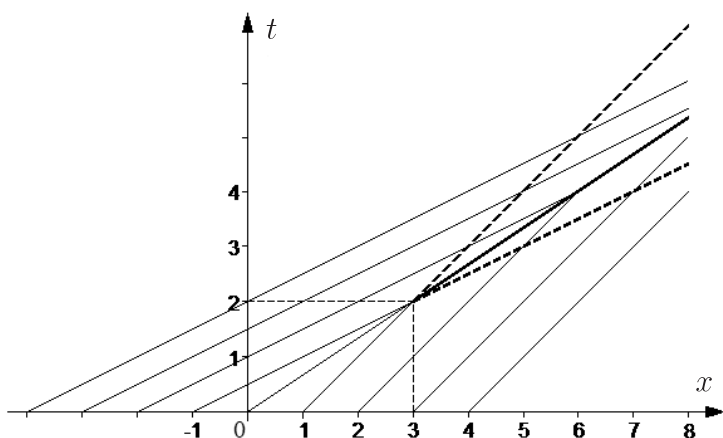


Рис. 1.7. Решение задачи Коши, описываемой нелинейным уравнением переноса при начальном возмущении (1.11.12)

классу простейших уравнений и учитывает процесс нелинейного переноса и процессы диссипации, поскольку член с параметром μ отвечает за диссипацию возмущения $u(x, t)$ в среде. Уравнение (1.11.18) возникает в газовой динамике, если в уравнении Эйлера учесть вязкие силы, и при описании концентрации вещества в среде, если скорость переноса линейно зависит от самой концентрации [55]. Полагая $\alpha = 0$ в (1.11.18), имеем уравнение диффузии:

$$u_t = \mu u_{xx}. \quad (1.11.19)$$

Описание методов решения краевых задач и задач Коши для уравнения (1.11.19) можно найти во многих книгах по уравнениям математической физики [4, 63, 64, 65]. Особенный интерес к уравнению (1.11.18) возник в связи с открытием замечательного факта [91, 101], состоящего в том, что уравнение (1.11.18) с помощью преобразования Коула—Хопфа

$$u = -2\mu \frac{\varphi_x}{\varphi} \quad (1.11.20)$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности (уравнение (1.11.19) с переменной $\varphi(x, t)$). Это обстоятельство позволяет находить многочисленные решения задач, описываемых уравнением (1.11.18). Совершая предельный переход в уравнении (1.11.18) при $\mu \rightarrow 0$, приходим к нелинейному уравнению переноса, и поэтому обобщенное решение задачи Коши, описываемой уравнением (1.11.1), может быть найдено, используя задачу Коши для уравнения (1.11.18).

1.12. Уравнение Кортевега—де Вриза—Бюргерса для описания волн в вязкоэластичной трубке

Для описания течения жидкости в вязко-упругой аксиально-симметричной трубке переменного сечения воспользуемся уравнением непрерывности и уравнением для аксиальной компоненты двумерного уравнения Навье—Стокса [48, 49]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(vr)}{\partial r} + \frac{\partial(ur)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \nu_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.12.1)$$

где v — радиальная и u — аксиальная компоненты скорости течения; ν_0 — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность жидкости, P — давление в жидкости.

Пусть профиль аксиальной компоненты скорости по радиусу имеет вид обобщенного закона Гагена—Пуазейля

$$\begin{aligned} u(r, x, t) &= \frac{s+2}{s} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^s \right] u_a(x, t), \\ u_a(x, t) &= \frac{2}{R^2} \int_0^{R(x,t)} u(r, x, t) r \, dr, \end{aligned}$$

где s — показатель крутизны профиля. Усредняя уравнения сохранения массы и импульса жидкости (1.12.1) по поперечному сечению трубки, приходим к одномерным уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su_a)}{\partial x} = 0, \quad (1.12.2)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \nu_0 \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} - 2\nu_0 (s + 2) \frac{u_a}{R^2}, \quad (1.12.3)$$

где $u_a = u_a(x, t)$ — средняя по сечению осевая компонента скорости, $S = S(x, t)$ — площадь поперечного сечения трубки. Далее индекс u опускаем.

Поскольку $S(x, t) = \pi R(x, t)^2$, то уравнение (1.12.2) преобразуется к виду

$$R_t + uR_x + \frac{1}{2}Ru_x = 0.$$

Учитывая малые изменения радиуса трубки $R = R_0 + \eta$, $R_0 = \text{const}$, получаем уравнение

$$\eta_t + \frac{R_0}{2}u_x + \frac{1}{2}\eta u_x + u\eta_x = 0. \quad (1.12.4)$$

Ограничимся анализом нелинейных волн в длинноволновом приближении и при больших числах Рейнольдса.

В кровеносных сосудах такое приближение справедливо для крупных и средних артерий. Стенка кровеносного сосуда имеет сложную структуру и состоит из различных типов тканей с различными механическими характеристиками, одновременно сочетая в себе упругие свойства твердых тел с вязкими свойствами жидкостей. Причем строение различных слоев в стенке значительно меняется в зависимости от калибра и функции артерии.

Будем предполагать, что стенка трубки однородна, изотропна, несжимаема и состоит из вязко-эластичного материала. Деформация трубки характеризуется изменением ее радиуса, который зависит от координаты и времени. Характерные длины

волн много больше равновесного радиуса. Уравнение, связывающее давление с радиусом трубки, можно представить в виде [48]

$$P = \rho_w h_0 \eta_{tt} - k h_0 \eta_{xx} - \chi h_0 \eta_{txx} + \mu \eta_t + \frac{\kappa_1 h_0}{R_0} \eta + \frac{\kappa_2 h_0}{R_0^2} \eta^2 + P_e, \quad (1.12.5)$$

где ρ_w — объемная плотность стенки трубки, h_0 — толщина стенки трубки, k — коэффициент, характеризующий продольные напряжения стенки, χ — коэффициент вязкости материала стенки, μ — коэффициент, характеризующий сопротивление среды, κ_1 — коэффициент линейной упругости, κ_2 — коэффициент нелинейной упругости.

Таким образом, для описания одномерного течения жидкости в аксиально-симметричной вязко-эластичной трубке при больших числах Рейнольдса имеем систему уравнений

$$\eta_t + \frac{R_0}{2} u_x + \frac{1}{2} \eta u_x + u \eta_x = 0, \quad (1.12.6)$$

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} P_x = 0, \quad (1.12.7)$$

$$P = \rho_w h_0 \eta_{tt} - k h_0 \eta_{xx} - \chi h_0 \eta_{txx} + \mu \eta_t + \frac{\kappa_1 h_0}{R_0} \eta + \frac{\kappa_2 h_0}{R_0^2} \eta^2 + P_e. \quad (1.12.8)$$

Предполагая, что давление в потоке пропорционально возмущению радиуса, и опуская нелинейные слагаемые в системе уравнений для невязкой жидкости, получаем простейшую линеаризованную систему для описания процесса течения жидкости в эластичной трубке:

$$\eta_t + \frac{R_0}{2} u_x = 0, \quad u_t + \frac{1}{\rho} P_x = 0, \quad P = \frac{\kappa h_0}{R_0} \eta + P_e. \quad (1.12.9)$$

Система (1.12.9) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}\eta_t + \frac{R_0}{2} u_x &= 0, \\ u_t + \frac{\kappa h_0}{\rho R_0} \eta_x &= 0.\end{aligned}$$

Дифференцируя первое уравнение по x , а второе — по t , получаем линейные волновые уравнение для возмущений скорости:

$$u_{tt} = \frac{\kappa h_0}{2\rho} u_{xx}.$$

Аналогичные уравнения справедливы для возмущений радиуса и давления.

Скорость распространения импульса давления при течении жидкости в эластичной трубке, полученная Моенсом и Кортевегом, имеет вид:

$$c_0 = \sqrt{\frac{\kappa h_0}{2\rho}} = \sqrt{\frac{E h_0}{2\rho R_0(1 - \sigma^2)}}. \quad (1.12.10)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}t &= \frac{l}{c_0} t', \quad x = l x', \quad u = c_0 u', \quad \eta = \frac{R_0}{2} \eta', \\ P &= P_0 P' + P_0, \quad P_0 = P_e.\end{aligned} \quad (1.12.11)$$

Система уравнений, описывающая процесс течения жидкости, в безразмерных переменных имеет вид (штрихи опущены):

$$\begin{aligned}\eta_t + u_x + \frac{1}{2} \eta u_x + u \eta_x &= 0, \\ u_t + u u_x + \frac{1}{\alpha} P_x &= 0, \\ P &= \gamma \eta_{tt} - \beta \eta_{xx} + \lambda \eta_t - \delta \eta_{txx} + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2,\end{aligned} \quad (1.12.12)$$

где использованы обозначения параметров

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho c_0^2}{P_0}, & \beta &= \frac{kh_0 R_0}{2P_0 l^2}, & \gamma &= \frac{\rho_w h_0 R_0 c_0^2}{2P_0 l^2}, \\ \delta &= \frac{\chi h_0 R_0 c_0}{2P_0 l^3} & \lambda &= \frac{\mu R_0 c_0}{2P_0 l} & \alpha_1 &= \frac{\kappa_1 h_0 R_0}{4P_0} - \alpha. \end{aligned} \quad (1.12.13)$$

Большинство эволюционных нелинейных уравнений могут быть получены с использованием техники метода многих масштабов и метода возмущений, описание которых в настоящее время широко представлено в литературе. В системе уравнений (1.12.12) имеются малые параметры $\varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon_1 = a_0/R_0$ и $\varepsilon_2 = R_0/l$, где a_0 —амплитуда возмущений радиуса). Поскольку характерные скорости волн давления (пульсовых волн) велики по сравнению со скоростями течения жидкости, то для изучения эволюции возмущений в приближении длинных волн малой амплитуды удобно перейти к переменным "медленного" времени, выделив направление распространения волны. В качестве параметра ε выберем наименьший ($\varepsilon \sim 0, 1$). Тогда решение системы уравнений ищем, используя переменные:

$$\xi = \varepsilon^m (x - t), \quad \tau = \varepsilon^n t, \quad m > 0, \quad (1.12.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Подстановка (1.12.14) в (1.12.12) и сокращение на ε^m выражений в первых двух уравнениях приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon \eta'_\tau - \eta'_\xi + u'_\xi + \frac{1}{2} \eta' u'_\xi + u' \eta'_\xi &= 0, \\ \varepsilon u'_\tau - u'_\xi + u' u'_\xi + \frac{1}{\alpha} P'_\xi &= 0, \\ P' &= \varepsilon^{2m+2} \gamma \eta'_{\tau\tau} - \varepsilon^{2m+1} 2\gamma \eta'_{\tau\xi} + \varepsilon^{2m} (\gamma - \beta) \eta'_{\xi\xi} + \\ &+ \varepsilon^{m+1} \lambda \eta'_\tau - \varepsilon^m \lambda \eta'_\xi - \varepsilon^{3m+1} \delta \eta'_{\tau\xi\xi} + \\ &+ \varepsilon^{3m} \delta \eta'_{\xi\xi\xi} + \alpha \eta' + \alpha_1 \eta'^2. \end{aligned} \quad (1.12.15)$$

Решение этой системы ищем в виде асимптотического разложения

$$\begin{aligned} u' &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\ \eta' &= \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots, \\ P' &= \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots. \end{aligned} \quad (1.12.16)$$

Подставляя (1.12.16) в (1.12.15) и приравнявая выражения при ε^0 , имеем соотношения в нулевом приближении

$$-\eta_1 \xi + u_1 \xi = 0, \quad -u_1 \xi + \frac{1}{\alpha} P_1 \xi = 0, \quad P_1 = \alpha \eta_1.$$

Откуда находим

$$u_1(\xi, \tau) = \eta_1(\xi, \tau) + \psi(\tau), \quad P_1(\xi, \tau) = \alpha \eta_1(\xi, \tau), \quad (1.12.17)$$

где $\psi(\tau)$ — произвольная функция, которую в соответствии с краевыми условиями для u_1 и η_1 следует положить равной нулю.

Подставляя (1.12.16) в систему (1.12.15), получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \eta_{1\tau} - \eta_{2\xi} + u_{2\xi} + \frac{1}{2} \eta_1 u_{1\xi} + u_1 \eta_{1\xi} &= 0, \\ u_{1\tau} - u_{2\xi} + u_1 u_{1\xi} + \frac{1}{\alpha} P_{2\xi} &= 0, \\ P_2 &= \alpha \eta_2 + \alpha_1 \eta_1^2 + \varepsilon^{2m-1} (\gamma - \beta) \eta_{1\xi\xi} + \\ &+ \varepsilon^{3m-1} \frac{\delta}{\alpha} \eta'_{\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon^{2m-1} \delta \eta_{1\xi\xi\xi} - \varepsilon^{m-1} \lambda \eta_{1\xi}. \end{aligned}$$

Откуда приходим к уравнению для η_1 :

$$\begin{aligned} \eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha} \right) \eta_1 \eta_{1\xi} + \varepsilon^{2m-1} \left(\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi} \right) + \\ + \varepsilon^{3m-1} \left(\frac{\delta}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} \right) - \varepsilon^{m-1} \left(\frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.12.18)$$

Уравнение (1.12.18) является основным уравнением, на основании которого находятся эволюционные уравнения для описания нелинейных волновых процессов в гемодинамике.

Пусть $m > 1$, тогда из (1.12.18) получаем нелинейное уравнение переноса:

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha} \right) \eta_1 \eta_{1\xi} = 0. \quad (1.12.19)$$

В случае $m = 1$, из (1.12.18) приходим к уравнению Бюргерса:

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha} \right) \eta_1 \eta_{1\xi} = \frac{\lambda}{2\alpha} \eta_{1\xi\xi}. \quad (1.12.20)$$

Полагая $m = \frac{1}{2}$ и $\lambda = 2\alpha\sigma\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, из (1.12.18) получаем уравнение Кортевега—де Вриза—Бюргерса:

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha} \right) \eta_1 \eta_{1\xi} + \left(\frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \right) \eta_{1\xi\xi} = \sigma \eta_{1\xi\xi}. \quad (1.12.21)$$

Общепринятой записью уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса является уравнение

$$u_t + u u_x + \beta u_{xxx} = \mu u_{xx}. \quad (1.12.22)$$

Слагаемое с третьей производной характеризует дисперсию волн, а слагаемое со второй производной отвечает за диссипацию. Таким образом, уравнение (1.12.22) обобщает уравнение Кортевега—де Вриза на случай учета диссипативных процессов. Уравнение (1.12.22) в отличие от уравнения Кортевега—де Вриза не проходит тест Пенлеве и не относится к классу точно решаемых уравнений. Оно не имеет решений в виде солитонов, но имеет аналитические решения в виде кинков, которые по своей сути являются также уединенными волнами [39, 41, 124]. Однако при взаимодействии этих волн с другими возникает излучение, что показывает, что эти уединенные волны не взаимодействуют как солитоны, описываемые уравнением Кортевега—де Вриза.

В периодической литературе встречается обобщенное уравнение уравнение Кортевега—де Вриза—Бюргерса

$$u_t + u^n u_x + \beta u_{xxx} - \gamma u_{xx} = 0. \quad (1.12.23)$$

Уравнение наиболее популярно при $n = 1$ и $n = 2$. В этих случаях оно совпадает с уравнениями Кортевега—де Вриза и модифицированным уравнением Кортевега—де Вриза при учете диссипативных процессов. В общем случае при $\nu \neq 0$ уравнение (1.12.23) не проходит тест Пенлеве и не относится к классу точно решаемых уравнений.

1.13. Уравнение Курамото—Сивашинского для описания волновых процессов

Вернемся к уравнению (1.12.18). Пусть $m = \frac{1}{3}$, и параметры математической модели таковы, что выполняются соотношения: $\delta = 2\alpha\chi$, $\gamma = \beta + 2\alpha\kappa\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ и $\lambda = 2\alpha\sigma\varepsilon^{\frac{2}{3}}$, тогда получаем уравнение четвертого порядка в виде:

$$\eta_{1\tau} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \eta_1 \eta_{1\xi} + \kappa \eta_{1\xi\xi\xi} + \chi \eta_{1\xi\xi\xi\xi} = \sigma \eta_{1\xi\xi\xi}. \quad (1.13.1)$$

Общепринятой записью уравнения (1.13.1) является уравнение Курамото — Сивашинского

$$u_t + u u_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0, \quad (1.13.2)$$

где параметры α , β и γ в отличие от параметров уравнения (1.13.1) положительны. Эти параметры никак не связаны с параметрами, которые использованы при формулировке математической модели для описания волн в гемодинамике. Более того, уравнение (1.13.1) по своей физической сути отличается от уравнения (1.13.2), поскольку в математической модели учитываются только дисперсия и диссипативные процессы.

Уравнение (1.13.2) — одно из самых популярных уравнений, используемых при описании волновых процессов для активных и диссипативных сред. Оно является одним из простейших уравнений, которое применяется при численном моделировании процессов турбулентности [110, 149]. Волновые процессы часто изу-

чались при $\beta = 0$, что соответствует случаю отсутствия дисперсионного слагаемого. Популярность уравнения (1.13.2) объясняется тем, что формально это уравнение обобщает уравнение Кортевега—де Вриза на случаи учета диссипации (слагаемое $-\gamma u_{xxxx}$) и подкачки энергии в систему (слагаемое $-\alpha u_{xx}$).

Используя замену переменных [120]

$$u = u' \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}, \quad x = x' \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad t = t' \frac{\gamma}{\alpha^2}, \quad \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}, \quad (1.13.3)$$

уравнение (1.13.2) можно привести к виду

$$u_t + u u_x + u_{xx} + \sigma u_{xxx} + u_{xxxx} = 0. \quad (1.13.4)$$

Уравнение (1.13.2), по-видимому, впервые появилось в 1966 году в работе [85] при изучении процесса стекания тонкого слоя жидкости по наклонной плоскости и поэтому иногда называется уравнением Бенни. Для анализа такого процесса это уравнение также применялось в работах [58, 68, 112]. Оно использовалось при описании процессов, возникающих при одновременном движении жидкости и газа [89]. Изучение волн на границе двух вязких жидкостей в горизонтальном канале с помощью уравнения (1.13.2) проводилось в [108]. Уравнение (1.13.2) применялось при описании волновых явлений, происходящих при удержании плазмы в тороидальных установках [90].

Особенный интерес к уравнению (1.13.2) появился после опубликования работы [132], в которой рассматривались устойчивые волны концентрации при учете реакции и диффузии, а также работ [146, 147], в которых изучалось поведение фронта пламени.

Уравнение (1.13.2) не относится к классу точно решаемых нелинейных эволюционных уравнений. Оно не проходит тест Пенлеве и не имеет точных решений в виде солитонов, но при некоторых значениях параметров имеет небольшой набор солитоноподобных решений в виде уединенных волн [41, 42, 43, 44, 45, 113, 114, 130], а при некотором соотношении между параметрами

уравнение (1.13.2) имеет также устойчивую стационарную периодическую волну [45, 113]. Численное моделирование процессов, описываемых с помощью уравнения (1.13.2), проводилось во многих работах [50, 83, 110, 122, 149]. Картина волновых течений, описываемых этим уравнением, в настоящее время хорошо изучена.

В последнее время в зарубежной периодической литературе появилось обобщенное уравнение Курамото—Сивашинского, имеющее вид:

$$u_t + u^n u_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0. \quad (1.13.5)$$

Уравнение (1.13.5) обобщает уравнение (1.13.2) на случай более общей нелинейности. Оно также не проходит тест Пенлеве, не имеет точных решений в виде солитонов, не относится к классу точно решаемых нелинейных эволюционных уравнений, но при некоторых значениях параметров имеет небольшой набор солитоноподобных решений в виде уединенных волн [130]. Однако математические модели, описываемые уравнением (1.13.5), в настоящее время изучены не достаточно.

1.14. Уравнение для описания волн в жидкости с конвекцией

В работе [82] для описания нелинейных волн с учетом конвекции жидкости впервые появилось уравнение, которое является формальным обобщением уравнения Курамото—Сивашинского

$$u_t + \varepsilon u u_x + \chi (u u_x)_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0. \quad (1.14.1)$$

Позже уравнение (1.14.1) появилось при описании некоторых других нелинейных волновых процессов.

Задача Коши для этого уравнения в общем случае не решается. Уравнение не проходит тест Пенлеве на интегрируемость. Небольшой набор точных решений для этого уравнения получен в работах [126, 142].

1.15. Уравнение пятого порядка для описания волн под ледяным покровом

При описании волновых процессов на поверхности жидкости покрытой упругой пластиной (например, волны в океане под ледяным покровом) уже более двадцати лет используется уравнение

$$u_t + u u_x + \beta u_{xxx} = \delta u_{xxxxx}. \quad (1.15.1)$$

Уравнение (1.15.1) имеет два дисперсионных слагаемых, но не относится к классу точно решаемых, хотя имеет решение в виде уединенной волны [8, 29, 45]. Численное моделирование волновых процессов, описываемых уравнением (1.15.1), впервые проводилось Кавахарой [110]. Математические модели, описываемые уравнением (1.15.1), в настоящее время хорошо изучены [8, 29].

1.16. Нелинейное уравнение шестого порядка для описания процессов турбулентности

В последние годы при описании процессов турбулентности используется уравнение шестого порядка, содержащее слагаемые, учитывающие диссипацию и подкачку энергии в систему:

$$u_t + u u_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \delta u_{xxxxx} = 0. \quad (1.16.1)$$

Уравнение (1.16.1) рассматривалось в работе [43] как пример уравнения шестого порядка, имеющего точные решения. При изучении физических процессов уравнение (1.16.1) появилось в работах [84, 137] как уравнение, которое описывает новый тип турбулентности.

Умножив все слагаемые уравнения (1.16.1) на $u(x, t)$ и проинтегрировав по x от $-\infty$ до ∞ , получаем уравнение

$$\frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial t} + 2\alpha \langle u_x^2 \rangle - 2\beta \langle u_{xx}^2 \rangle + 2\delta \langle u_{xxx}^2 \rangle = 0, \quad (1.16.2)$$

где

$$\begin{aligned} \langle u_x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx, & \langle u_{xx}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}^2 dx, \\ \langle u_{xxx}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}^2 dx. \end{aligned} \quad (1.16.3)$$

Из уравнения (1.16.2) следует, что при $\alpha < 0$, $\beta < 0$ и $\delta < 0$ третий и пятый члены в уравнении (1.16.1) характеризуют процесс добавления энергии в систему, тогда как четвертый член отвечает за диссипативные процессы. В случае $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\delta > 0$ роль слагаемых меняется: третий и пятый члены характеризуют диссипацию энергии в системе, описываемой уравнением, а четвертый член отвечает за подкачку энергии в систему. В зависимости от знаков коэффициентов α , β и δ возможны и другие варианты развития процессов.

Формально уравнение (1.16.1) обобщает уравнение Курамото—Сивашинского и по физической сути моделирует аналогичные процессы. Строгий вывод уравнения (1.16.1) в настоящее время отсутствует. Уравнение (1.16.1), как и уравнение Курамото—Сивашинского, не относится к классу точно решаемых уравнений, не имеет решений в виде солитонов, но имеет некоторый набор частных решений при некоторых соотношениях между параметрами уравнения. Численное моделирование

процессов, описываемых уравнением (1.16.1), представлено в работе [50].

1.17. Уравнение Колмогорова—Петровского—Пискунова

В работе А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского и Н.С. Пискунова применительно к исследованию процесса распространения генной волны [37] изучалось уравнение

$$u_t = \delta u_{xx} + u(\alpha - u). \quad (1.17.1)$$

Почти одновременно с этой работой появилась статья Р.А. Фишера [103], и поэтому уравнение (1.17.1) в зарубежной литературе часто называется уравнением Фишера.

Уравнение (1.17.1) является простейшей математической моделью для описания динамики популяций. Изучению процессов, описываемых с помощью этого уравнения, посвящено огромное число работ. Обзор этих работ можно найти в книгах [67, 136]. Уравнение (1.17.1) не проходит тест Пенлеве на интегрируемость и не относится к классу точно решаемых уравнений. Однако при некоторых значениях параметров уравнение имеет небольшой набор точных решений [23].

1.18. Уравнение Бюргерса—Хаксли

Еще одно уравнение, относящееся к динамике популяций, имеет вид [23]

$$u_t + \alpha u u_x = D u_{xx} + \beta u + \gamma u^2 - \delta u^3, \quad D \neq 0. \quad (1.18.1)$$

В уравнении (1.18.1) предполагается, что D — коэффициент диффузии, α характеризует нелинейный перенос популяции, а параметры β , γ и δ описывают нелинейный источник.

Пусть в среде происходит размножение какого-либо вида организмов. Тогда динамика системы при учете смертности и диффузионного перемещения популяции по среде описывается уравнением

$$n_t = -kn + \kappa m(n)n^2 + D\Delta n, \quad (1.18.2)$$

где n — численность популяции в расчете на единицу объема, $m(n)$ — масса пищи, k — коэффициент убыли и κ — коэффициент прироста популяции [55]. Если считать, что масса пищи меняется по закону $m(n) = m_0(1 - n/n_0)$, то уравнение (1.18.2) будет уравнением Бюргерса—Хаксли с $\alpha = 0$.

Кроме описания динамики популяций, уравнение (1.18.1) встречается и при описании ряда других нелинейных волновых явлений. Например, уравнение

$$\tau P_t = l^2 P_{xx} + \varepsilon P - \sigma P^3 - E, \quad (1.18.3)$$

описывающее движение доменной стенки сегнетоэлектрика в электрическом поле, при $\alpha = 0$ сводится к уравнению (1.18.1) с помощью линейной замены. В уравнении (1.18.3) P — дипольный момент, E — внешнее электрическое поле. Левая часть характеризует диссипативный процесс перехода электростатической энергии в тепловую, τ — характерное время релаксации дипольного момента. Первое слагаемое в правой части уравнения описывает взаимодействие между дипольными моментами соседних областей сегнетоэлектрика, остальные слагаемые определяют величину дипольного момента в однородном сегнетоэлектрике [23].

Установлено, что уравнение (1.18.1) не проходит теста Пенлеве [39] и, следовательно, в общем случае не является точно решаемым уравнением.

Для описания динамики популяций в периодической литературе встречается также обобщенное уравнение Бюргерса—Хаксли, имеющее вид [136]

$$u_t + \alpha u u_x = D u_{xx} + \beta u + \gamma u^m - \delta u^n. \quad (1.18.4)$$

Уравнение (1.18.4) не относится к классу точно решаемых уравнений и не проходит тест Пенлеве, однако имеет небольшой набор точных решений. Математическая модель, описываемая уравнением (1.18.4), в настоящее время изучена не достаточно подробно.

1.19. Уравнения фильтрации газа в пористой среде

Одномерное движение газа в пористой среде можно описать системой уравнений газовой динамики с учетом сил трения, возникающих при взаимодействии газа с твердой средой [40]:

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{x^\nu} \frac{\partial(\rho u x^\nu)}{\partial x} = 0, \quad (1.19.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = F(u),$$

где ε — пористость среды, ρ — плотность газа, u — массовая скорость, P — давление газа, x — координата, $F(u)$ — сила сопротивления, ν — индекс симметрии, ($\nu = 0$ соответствует случаю плоской фильтрации, при $\nu = 1$ — цилиндрически симметричное движение газа, в случае $\nu = 2$ — сферически симметричное движение).

Система уравнений (1.19.1) дополняется уравнением состояния, связывающим давление и плотность газа. Обычно в качестве такого уравнения используется уравнение состояния политропического газа

$$P = B \rho^n. \quad (1.19.2)$$

Из экспериментальных данных следует, что при малых значениях чисел Рейнольдса сила сопротивления зависит от скорости движения газа в соответствии с линейным законом и пропорциональна величине вязкости газа. При больших значениях чисел Рейнольдса сила сопротивления при фильтрации газа зависит от скорости по квадратичному закону и практически не зависит от вязкости газа. Зависимость силы сопротивления от скорости фильтрации газа в общем случае можно представить в виде [38, 40]

$$F(u) = -\frac{\mu u}{k} - \frac{\lambda \rho u^2}{k}, \quad (1.19.3)$$

где μ — вязкость газа, k — проницаемость среды, λ — постоянная, характеризующая структуру пористой среды.

При малых значениях чисел Рейнольдса сила сопротивления берется в виде

$$F_1(u) = -\frac{\mu u}{k}. \quad (1.19.4)$$

Теоретически и экспериментально установлено, что инерционные слагаемые в уравнении движения (1.19.1) быстро затухают, и скорость движения при фильтрации газа определяется зависимостью силы сопротивления от скорости (1.19.3) или (1.19.4).

Учитывая выражение (1.19.4), получаем зависимость скорости движения от градиента давления в виде закона Дарси

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (1.19.5)$$

Полагая, что сила сопротивления определяется двучленной зависимостью от скорости, имеем уравнение движения, называемое законом Форхгеймера:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu u}{k} \left(1 + \frac{\lambda \rho}{\mu} \right). \quad (1.19.6)$$

Предполагая справедливость закона Дарси и учитывая зависимость давления газа от плотности в форме политропы, из уравнения (1.19.1) имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\chi}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\nu \rho^n \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad \chi = \frac{B n k}{\mu}. \quad (1.19.7)$$

В случае зависимости градиента давления от квадрата скорости для изотермической фильтрации газа имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\lambda \rho u^2}{k c_0^2}, \quad (1.19.8)$$

где c_0 — изотермическая скорость звука. В этом случае при $\nu = 0$ из закона сохранения массы (1.19.1) получаем уравнение для скорости движения в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mu}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu = \frac{k c_0^2}{2\lambda}. \quad (1.19.9)$$

Это уравнение совпадает с уравнением Бюргерса, в котором вязкость обратно пропорциональна скорости фильтрации газа.

1.20. Нелинейное уравнение теплопроводности

Уравнение (1.19.7) совпадает с уравнением нелинейной теплопроводности если воспользоваться заменой $\rho(x, t) \rightarrow T(x, t)$ [27].

Нелинейное уравнение теплопроводности часто записывается с учетом нелинейного источника

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a^2}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\nu T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(T), \quad (1.20.1)$$

где $f(T)$ — зависимость источника от температуры. Подобные математические модели рассматриваются при изучении многочисленных задач физики горения [28].

При $f(T) = 0$ уравнение (1.20.1) является нелинейным уравнением теплопроводности, обобщающим хорошо известное линейное уравнение теплопроводности на случай учета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры в виде степенной функции. Это уравнение описывает процессы распространения тепла при высоких температурах, когда за механизм переноса тепла ответственны электронная или лучистая теплопроводность.

Известны автомодельные решения ряда задач, описываемых уравнением (1.20.1) при $f(T) = 0$. Впервые аналитическое решение задачи при наличии мгновенного точечного источника получили Я.Б. Зельдович и А.С. Компанец [26]. Приближенные решения краевых задач на полубесконечной прямой получены в работах [40, 47, 51].

В случае $f(T) \neq 0$ уравнение (1.20.1) стало популярным в связи с изучением режима с обострением температуры, исследование которого проводилось А.А. Самарским, С.П. Курдюмовым и их учениками. Детальное исследование многих задач нелинейной теплопроводности можно найти в монографиях [5, 15, 65].

1.21. Модель Хенона—Хейлеса

Модель Хенона и Хейлеса впервые появилась при численном исследовании движения звезды в среднем поле галактики [55]. Система уравнений, описывающая это движение, может быть получена при рассмотрении взаимодействия трех одинаковых масс, расположенных в вершинах равностороннего треугольника [39, 53, 55].

Пусть имеются три взаимодействующие массы, как показано на рис. 1.8. Система уравнений для описания движения каждой из масс имеет вид

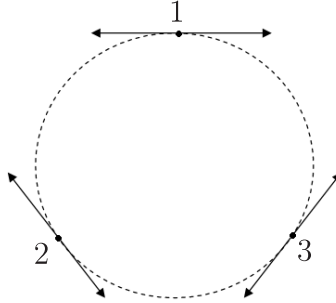


Рис. 1.8. Взаимодействие трех масс в модели Хенона—Хейлеса

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= F(x_1 - x_3) - F(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 &= F(x_2 - x_1) - F(x_3 - x_2), \\ \ddot{x}_3 &= F(x_3 - x_2) - F(x_1 - x_3),\end{aligned}\tag{1.21.1}$$

где x_i — отклонение от положения равновесия i -й массы ($i = 1, 2, 3$), $F(z)$ — сила, которая выражается формулой

$$F(z) = -k[1 - \exp(-\beta z)].\tag{1.21.2}$$

Гамильтониан системы (1.21.1) имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2} + \frac{k}{\beta} \left(e^{-\beta(x_{i+1} - x_i)} - 1 \right),\tag{1.21.3}$$

где принято, что $x_4 = x_1$, $p_i = \dot{x}_i$.

Из системы уравнений (1.21.1) следуют законы сохранения импульса и энергии

$$\sum_{i=1}^3 p_i = c_1, \quad H = E = c_2.\tag{1.21.4}$$

Это два первых интеграла. Выражение для третьего интеграла, имеющего вид

$$\sum_{i=1}^3 \left[\frac{p_i^3}{3} + \frac{k}{\beta} (p_i + p_{i+1}) e^{-\beta(x_{i+1}-x_i)} \right] = c_3, \quad (1.21.5)$$

было получено Хеноном.

Из (1.21.4) следует, что при $c_1 = 0$

$$x_3 = -(x_1 + x_2).$$

Полагая

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{4}\beta(x_1 + x_2), \quad y = -\frac{1}{4}\beta(x_1 - x_2) \quad (1.21.6)$$

$$p_x = \frac{dx}{d\tau}, \quad p_y = \frac{dy}{d\tau}, \quad \tau = \sqrt{3\beta k} t,$$

имеем

$$\beta(x_3 - x_1) = 2(y + \sqrt{3}x), \quad \beta(x_2 - x_3) = 2(y - \sqrt{3}x)$$

$$\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \frac{12k}{\beta}(p_x^2 + p_y^2). \quad (1.21.7)$$

Соотношения (1.21.7) позволяют представить гамильтониан (1.21.3) в виде

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{1}{24} [\exp(2y + 2\sqrt{3}x) + \exp(2y - 2\sqrt{3}x) + \exp(-4y) - 3]. \quad (1.21.8)$$

Разложив в ряды Тейлора до членов третьего порядка экспоненты в (1.21.8), при малых x и y получаем гамильтониан Хенона—Хейлеса

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3, \quad (1.21.9)$$

который приводит к следующей системе уравнений движения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x(1 + 2y), \\ \ddot{y} &= -(y + x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (1.21.10)$$

Обычно для системы Хенона—Хейлеса рассматривают гамильтониан более общего вида

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha x^2 + \beta y^2) + \delta x^2 y - \frac{1}{3} \gamma y^3 \quad (1.21.11)$$

и соответствующие ему уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\alpha x - 2\delta xy, \\ \ddot{y} &= -\beta y + \gamma y^2 - \delta x^2. \end{aligned} \quad (1.21.12)$$

Система уравнений (1.21.12) в общем случае не является интегрируемой, поскольку в ней отсутствуют переменные действие—угол, позволяющие найти решение системы. Однако при определенных соотношениях на параметры α , β , γ и δ решение (1.21.12) может быть получено в аналитическом виде.

Для системы уравнений (1.21.10) находится интеграл энергии:

$$E = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3, \quad (1.21.13)$$

который позволяет исключить одну из переменных системы уравнений (1.21.10). Хенон и Хейлес провели численное моделирование поведения этой системы уравнений, используя различные значения энергии в гамильтониане (1.21.9) и различные начальные условия.

При численном моделировании Хенон и Хейлес последовательно отмечали пересечение фазовой траектории с плоскостью (y, \dot{y}) для различных уровней энергии [55]. Авторы получили, что при малых значениях энергии точки на плоскости образовывали совокупность замкнутых линий, что соответствовало движению по поверхности тора с плотной обмоткой. При этом каждая из замкнутых кривых соответствовала дополнительному интегралу для системы уравнений Хенона—Хейлеса. При увеличении значений энергии результаты расчета существенно изменялись. Замкнутые линии уже больше не возникали, а образовывалось густое множество хаотически разбросанных точек на плоскости (y, \dot{y}) .

Расчеты Хенона и Хейлеса показали, что даже сравнительно простые системы уравнений при численном моделировании поведения их фазовых траекторий демонстрируют сложное поведение и ведут себя как хаотические системы.

1.22. Система Лоренца

Впервые система Лоренца была получена из уравнений Навье—Стокса при исследовании процессов тепловой конвекции в подогреваемом снизу плоском слое жидкости. Ниже предлагается упрощенный вывод этой системы для описания явлений конвекции жидкости в тороидальной трубе [39, 53], расположенной в вертикальной плоскости и подогреваемой снизу (рис. 1.9).

Пусть R — радиус среднего сечения тора; J — момент инерции жидкости находящейся в трубе; ρ — плотность жидкости, зависящая от температуры $T(\varphi, t)$ по линейному закону

$$\rho = \rho_0 - a\rho_0 (T - T_0), \quad (1.22.1)$$

где a — коэффициент объемного расширения жидкости; ρ_0 — плотность жидкости при начальной температуре T_0 .

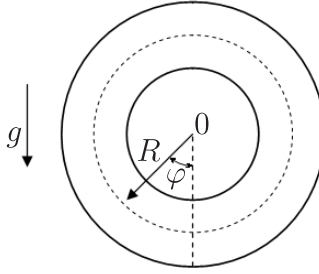


Рис. 1.9. Схема тороидальной трубы для описания конвекции жидкости, используемая при выводе системы уравнений Лоренца

Уравнение движения жидкости в тороидальной трубе можно записать в виде

$$J\dot{\omega} = -R^2 g \int_0^{2\pi} \rho \sin \varphi d\varphi - k\omega, \quad (1.22.2)$$

где $\omega(\varphi, t)$ — скорость движения жидкости; φ — угол, характеризующий координату жидкости, отсчитываемый от вертикали; g — ускорение свободного падения; k — коэффициент трения при движении жидкости.

Уравнение теплопроводности для движущейся жидкости имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - h(T - \tilde{T}), \quad (1.22.3)$$

где $\tilde{T}(\varphi)$ — стационарная температура поверхности трубы, являющаяся четной функцией от φ ; h — коэффициент теплообмена между жидкостью и стенкой трубы; κ — коэффициент теплопроводности.

Раскладывая $\tilde{T}(\varphi)$ и $T(\varphi, t)$ в ряды Фурье и принимая во внимание четность функции $\tilde{T}(\varphi)$, имеем

$$\tilde{T}(\varphi) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos n\varphi, \quad (1.22.4)$$

$$T(\varphi, t) = T_0 + \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n(t) \cos n\varphi + \beta_n(t) \sin n\varphi).$$

Подставляя (1.22.4), (1.22.1) в (1.22.2) и (1.22.3) и приравнявая нулю выражения при одинаковых тригонометрических функциях, получим

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= \pi a \rho_0 g R^2 \beta_1 - k\omega, \\ \dot{\alpha}_1 &= -\omega \beta_1 - (\kappa + h) \alpha_1 + hT_1, \\ \dot{\beta}_1 &= \omega \alpha_1 - (\kappa + h) \beta_1, \end{aligned} \quad (1.22.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0 &= -h\alpha_0, \\ \dot{\alpha}_n &= -n\omega \beta_n - (n^2 \kappa + h) \alpha_n + hT_n, \\ \dot{\beta}_n &= n\omega \alpha_n - (n^2 \kappa + h) \beta_n. \end{aligned} \quad (1.22.6)$$

Система уравнений (1.22.5) может рассматриваться независимо от (1.22.6). Ее можно упростить, если ввести переменные

$$\begin{aligned} x &= \frac{\omega}{\kappa + h}, \quad r = \frac{\pi h a \rho_0 g R^2}{\kappa(\kappa + h)} T_1, \quad y = \frac{\pi a \rho_0 g R^2}{\kappa} \beta_1, \\ z &= r - \frac{\pi a \rho_0 g R^2}{\kappa} \alpha_1, \quad \tau = (\kappa + h) t, \quad \sigma = \frac{k}{J(\kappa + h)}. \end{aligned} \quad (1.22.7)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -y + rx - zx, \\ \frac{dz}{d\tau} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (1.22.8)$$

где параметр b введен в (1.22.8) вместо единицы для стандартной записи системы уравнений Лоренца.

Параметры σ , r и b в системе Лоренца — положительные постоянные, имеющие вполне определенный физический смысл: σ — число Прандтля, r — нормированное число Рэлея, b — геометрический параметр, соответствующий характерному размеру процесса.

При численном решении системы уравнений (1.22.8) Э. Лоренц использовал следующие значения параметров [53]: $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r > 27,74$, что соответствовало наблюдениям французского физика Бенара при изучении явлений в подогреваемой кювете. Решая численно систему уравнений (1.22.8) при $b = 8/3$, $r = 28$ и σ на отрезке от 1 до 10, Э. Лоренц обнаружил новый тип поведения траекторий, притягивающихся в фазовом пространстве к некоторому множеству, получившему название *странный аттрактор*, который позже стал называться *аттрактором Лоренца* [53, 55].

Обсудим некоторые свойства системы Лоренца. Полагая $x = y = z = 0$, в (1.22.8) получаем, что значения переменных удовлетворяют уравнениям системы, поэтому система Лоренца — однородна, $x = y = z = 0$ — стационарная точка.

Система уравнений Лоренца допускает замену переменных (инвариантна относительно преобразования): $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$, что доказывается непосредственной проверкой. Следовательно, фазовый портрет системы симметричен относительно оси z , что упрощает численное исследование.

Система Лоренца является диссипативной, поскольку ее фазовый поток сжимается. Этот вывод следует из соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}(-\sigma x + \sigma y) + \frac{\partial}{\partial y}(rx - y - xz) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(xy - bz) = -\sigma - b - 1 < 0. \end{aligned} \quad (1.22.9)$$

Попадая в начальный момент времени в сферу, траектории решений системы уравнений Лоренца остаются в ограниченном фазовом пространстве [39, 53, 55]. Докажем это утверждение.

Пусть в некоторый момент времени точка находится на поверхности сферы, уравнение которой имеет вид:

$$x^2 + y^2 + [z - (\sigma + r)]^2 = K^2 (\sigma + r)^2. \quad (1.22.10)$$

Эта сфера имеет радиус $K(\sigma + r)$ с центром в точке $(0, 0, \sigma + r)$. Дифференцируя обе части уравнения (1.22.10) по времени, получаем:

$$x\dot{x} + y\dot{y} + (z - \sigma - r)\dot{z} = 0. \quad (1.22.11)$$

Подставляя производные \dot{x} , \dot{y} и \dot{z} в (1.22.11), приходим к уравнению:

$$\sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{\sigma + r}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} b (\sigma + r)^2. \quad (1.22.12)$$

Уравнение (1.22.12) является уравнением эллипса с центром в точке:

$$\left(0, 0, \frac{\sigma + r}{2} \right).$$

Длины полуосей эллипсоида по x и по y вычисляются в соответствии с формулами

$$\frac{b(\sigma + r)^2}{4\sigma}, \quad \frac{b(\sigma + r)^2}{4}.$$

Выбирая K^2 по формуле

$$K^2 = \frac{1}{4} + \frac{b}{4} \max \left(\frac{1}{\sigma}, 1 \right), \quad (1.22.13)$$

из уравнения (1.22.12) следует, что эллипсоид остается всегда внутри сферы.

Рассмотрим стационарные точки системы уравнений Лоренца. Координаты точек находятся из решения алгебраической системы уравнений

$$\sigma(y - x) = 0; \quad (1.22.14)$$

$$rx - y - xz = 0; \quad (1.22.15)$$

$$xy - bz = 0. \quad (1.22.16)$$

Из (1.22.14)–(1.22.16) следует, что точка $O = (0, 0, 0)$ — стационарная при любых значениях параметров задачи. Пусть $x \neq 0$, тогда при $y = x$ из (1.22.15) имеем $z = r - 1$. Используя уравнение (1.22.16), находим $x = \sqrt{b(r - 1)}$. Получаем координаты второй стационарной точки

$$O_1 = \left(\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1 \right). \quad (1.22.17)$$

Учитывая симметрию системы уравнений Лоренца, из (1.22.17) получаем координаты еще одной стационарной точки

$$O_2 = \left(-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1 \right). \quad (1.22.18)$$

Из приведенных формул следует, что стационарные точки O_1 и O_2 системы уравнений Лоренца появляются лишь при $r > 1$. В случае $r < 1$ система имеет мнимые стационарные точки O_1 и O_2 .

Исследуем устойчивость стационарных точек системы уравнений Лоренца. Термин устойчивости обычно используется в широком смысле. Однако мы будем иметь в виду *устойчивость стационарных точек по Ляпунову* [55]. Эта устойчивость устанавливается путем разложения решения вблизи стационарных точек и поэтому часто называется устойчивостью в линейном приближении.

Линейная часть системы уравнений Лоренца вблизи точки $O = (0, 0, 0)$ имеет вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{d\tau} = -y + rx, \quad \frac{dz}{d\tau} = -bz.$$

Матрица M , составленная из коэффициентов правых частей и соответствующая линейной части системы уравнений Лоренца,

вблизи первой стационарной точки имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (1.22.19)$$

Собственные значения матрицы M находятся из решения характеристического уравнения

$$\det(M - \lambda E) = 0, \quad (1.22.20)$$

где E — единичная матрица.

Уравнение (1.22.20) принимает вид:

$$(\lambda + b) [\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma(1 - r)] = 0, \quad (1.22.21)$$

откуда находим корни уравнения:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\sigma + 1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}. \quad (1.22.22)$$

Под корнем второго выражения (1.22.22) записана величина

$$(\sigma - 1)^2 + \sigma r > 0. \quad (1.22.23)$$

Точка $O = (0, 0, 0)$ при $r < 1$ является устойчивым узлом. В случае $r > 1$ система Лоренца имеет три стационарных точки, но точка O теряет устойчивость, превращаясь в седло—узел.

При $r = 1$ процессы теплопроводности уступают место конвективному переносу тепла, и в системе возникают ячейки Бена-ра.

Для исследования устойчивости стационарных точек O_1 и O_2 в системе уравнений Лоренца сделаем замену:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0, \quad (1.22.24)$$

где x_0, y_0 и z_0 — координаты стационарных точек O_1 и O_2 .

Линейная часть системы Лоренца в этом случае принимает вид (штрихи у переменных x' , y' и z' далее опущены):

$$\frac{dx}{d\tau} = \sigma(y - x), \quad (1.22.25)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = (r - z_0)x - y - x_0z, \quad (1.22.26)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = y_0x + x_0y - bz. \quad (1.22.27)$$

Матрица M , соответствующая системе уравнений (1.22.25)–(1.22.27), имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix}. \quad (1.22.28)$$

Поскольку

$$x_0 = y_0 = \pm\sqrt{b(r-1)} = c_0, \quad z_0 = r - 1,$$

то матрицу (1.22.28) можно записать

$$M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -c_0 \\ c_0 & c_0 & -b \end{pmatrix}. \quad (1.22.29)$$

Принимая во внимание (1.22.29), имеем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -c_0 \\ c_0 & c_0 & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.22.30)$$

Уравнение (1.22.30) можно представить в виде:

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(r + \sigma)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0. \quad (1.22.31)$$

На основании уравнения (1.22.31) определяется тип стационарных точек O_1 и O_2 . Анализируя корни уравнения (1.22.31), находим, что эти стационарные точки устойчивы при $\sigma > b + 1$ и $1 < r < r^*$, где

$$r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

При $r > r^*$ точки O_1 и O_2 становятся неустойчивыми. В этом случае характеристическое уравнение (1.22.31) имеет один действительный отрицательный корень и два комплексно-сопряженных с положительной действительной частью.

Более детальный анализ режимов, возникающих в системе Лоренца, проводился с помощью численных методов. Численное исследование системы Лоренца проводилось многими авторами, и в результате установлена эволюция режимов, описываемых (1.22.8) в зависимости от различных значений параметров σ , b и r [55].

В случае $10 < r < r_1 \approx 13,926$ система Лоренца имеет три стационарные точки O, O_1 и O_2 . При этом точка O представляет собой неустойчивую точку типа седло—узел, а две другие точки являются устойчивыми.

При $r_1 \approx 13,926$ стационарные точки O_1 и O_2 остаются устойчивыми, однако вокруг них образуются две замкнутые петли кривых, исходящих из точки O .

В случае $r_1 < r < r_2 \approx 24,06$ стационарные точки O_1 и O_2 остаются устойчивыми, но от каждой из петель рождаются седловые периодические траектории.

При $r_2 \approx 24,06$ стационарные точки O_1 и O_2 продолжают оставаться устойчивыми, но сепаратрисы, выходящие из точки O , не стремятся к этим точкам. Возникает множество траекторий, которое при $r_2 < r$ становится притягивающим.

При $r_2 < r < r_3 \approx 24,74$ стационарные точки O_1 и O_2 все еще устойчивы, однако в фазовом пространстве появляется предельное множество, называемое аттрактором Лоренца. В системе

возможны как стационарный, так и хаотический режимы движения.

Когда $r \rightarrow r_3 \approx 24,74$, седловые предельные циклы стягиваются к стационарным точкам O_1 и O_2 , и они становятся неустойчивыми.

В интервале $r_3 < r < r_4 = 28$ все стационарные точки O, O_1 и O_2 являются неустойчивыми. Устойчивым притягивающим предельным множеством (аттрактором) остается лишь аттрактор Лоренца. В динамической системе, описываемой системой уравнений Лоренца, вне зависимости от выбранных начальных условий реализуется хаотический режим движения.

Хаотический режим движения, описываемый системой уравнений Лоренца, продолжает существовать при значениях r из интервала: $r_4 < r < r_5 \approx 148,4$. При $r_5 < r$ в фазовом пространстве вместо странного аттрактора образуется предельный цикл, и движение в системе становится периодическим.

В работе Д. Рюэля и Ф. Такенса аттрактор Лоренца был назван *странным аттрактором*, поскольку он является новым типом стационарного режима движения, отличным от стационарной точки и предельного цикла. Этот аттрактор не является двумерной поверхностью. Поверхность, которая проходит через аттрактор, пересекается фазовыми траекториями в точках, образующих канторово множество [53, 55].

Система уравнений Лоренца была первой системой дифференциальных уравнений, имеющей физические приложения, для которой было доказано существование странного аттрактора.

Глава 2

Элементы группового анализа дифференциальных уравнений

Важным этапом исследования той или иной математической модели, является построение аналитических решений дифференциальных уравнений, описывающих явление. В настоящее время одним из общепринятых подходов для нахождения решений является поиск решений, инвариантных относительно соответствующей группы преобразований. Этот вопрос решается с помощью группового анализа дифференциальных уравнений, которому посвящен данный раздел.

2.1. Однопараметрическая группа преобразований Ли

Взаимно однозначное отображение множества M самого на себя называется преобразованием множества M . Совокупность

всех преобразований множества M образует группу преобразований. Далее в качестве множества M возьмем N -мерное евклидово пространство R^N , в котором точку $\vec{x} \in R^N$ с координатами (x^1, x^2, \dots, x^N) можно преобразовать в точку $\vec{x}' \in R^N$ с координатами $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$. Пусть отображение \vec{x} в \vec{x}' задается формулой $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$ или покомпонентно $x'^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^N, a)$, где a — вещественное число: $a \in R$ (R — множество всех вещественных чисел).

Относительно функций $f^i(\vec{x}, a)$ предположим, что они вместе со всеми своими производными по всем компонентам вектора \vec{x} и по параметру a принадлежат классу непрерывных функций. Как правило, отображения $\vec{f}(\vec{x}, a)$, которые используются в групповом анализе дифференциальных уравнений, определены не на всем пространстве R^N и не при всех вещественных числах R . Поэтому обычно говорят о локальных преобразованиях пространства $V \subset R^N$ и $\Delta \subset R$. Дадим определение.

Определение 2.1. *Локальной однопараметрической группой преобразований Ли называется семейство преобразований $\vec{f}(\vec{x}, a)$, имеющее свойства:*

- 1) существует $a_0 \in \Delta$, такое, что $\vec{f}(\vec{x}, a_0) = \vec{x}$;
- 2) если $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$, то найдется $\tilde{a} \in \Delta$, такое, что $\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}', \tilde{a})$;
- 3) для любых $a \in \Delta$, $b \in \Delta$, таких, что $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$ и $\vec{x}'' = \vec{f}(\vec{x}', b)$ найдется $c \in \Delta$, такое, что $\vec{x}'' = \vec{f}(\vec{x}, c)$, где $c = \varphi(a, b)$;
- 4) $\vec{f}(\vec{x}, a) \in C^\infty$.

Каждое отображение $\vec{f}(\vec{x}, a)$, которое имеет свойства 1) — 4) задает однопараметрическую непрерывную группу преобразований, которую далее обозначаем G .

Приведем примеры однопараметрических групп преобразований.

1. Группа преобразований переноса (сдвига) по оси x :

$$x' = x + a. \quad (2.1.1)$$

Поскольку для данного преобразования $a_0 = 0$, $\tilde{a} = -a$ и $x'' = x + c$, где $c = a + b$, то вышеперечисленные свойства для однопараметрической группы преобразований выполняются.

2. Группа преобразований растяжений на плоскости $R^2(x, y)$:

$$x' = xe^a, \quad y' = ye^{2a}. \quad (2.1.2)$$

Очевидно, что свойства 1) — 4) также выполняются.

3. Группа преобразований вращения в плоскости $R^2(x, y)$:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

является также по определению однопараметрической группой преобразований Ли.

Пусть преобразования $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$ образуют группу. Можно выбрать $a_0 = 0$. Разложим $\vec{f}(\vec{x}, a)$ в ряд Тейлора по параметру a в окрестности $a = 0$. Тогда поскольку $f(\vec{x}, 0) = x$, то

$$\vec{x}' = \vec{x} + a \frac{\partial \vec{f}}{\partial a} \Big|_{a=0} + o(a). \quad (2.1.4)$$

Обозначим

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial a} \Big|_{a=0} \quad (2.1.5)$$

за вектор касательного векторного поля группы преобразований G имеющего компоненты:

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N).$$

Таким образом, преобразование $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$ можно представить в виде

$$\vec{x}' = \vec{x} + a \vec{\xi}(\vec{x}). \quad (2.1.6)$$

Справедлива следующая теорема Софуса Ли [30, 31, 32].

Теорема 2.1. Пусть функции $f^i(\vec{x}, a)$, $(i = 1, \dots, N)$ удовлетворяют групповым свойствам и имеют разложения

(2.1.6). Тогда они являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (называемыми уравнениями Ли) с начальными условиями

$$\frac{\partial f^i}{\partial a} = \xi^i(\vec{f}), \quad f^i|_{a=0} = \vec{x}. \quad (2.1.7)$$

Справедливо и обратное утверждение, что при любом гладком векторном поле $\vec{\xi}(\vec{f})$ решение задачи Коши (2.1.7) образует группу преобразований.

Доказательство. Пусть $\vec{f}(\vec{x}, a)$ удовлетворяет групповым свойствам, тогда, придавая параметру a приращение b , имеем

$$\vec{f}(\vec{x}, a + \Delta a) = \vec{f}(\vec{f}(\vec{x}, a) \Delta a).$$

Откуда получаем два соотношения

$$\vec{f}(\vec{x}, a + \Delta a) = \vec{f}(\vec{x}, a) + \Delta a \frac{\partial \vec{f}}{\partial a} + o(\Delta a), \quad (2.1.8)$$

$$\vec{f}(\vec{f}(\vec{x}, a) \Delta a) = \vec{f}(\vec{x}, a) + \Delta a \frac{\partial \vec{f}}{\partial \Delta a}|_{\Delta a=0} + o(\Delta a), \quad (2.1.9)$$

приравнивая которые, приходим к уравнению

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{f}(\vec{x}, a), \Delta a)}{\partial \Delta a} = \vec{\xi}(\vec{f}(\vec{x}, a)), \quad (2.1.10)$$

совпадающему с уравнением Ли.

Пусть $\vec{f}(\vec{x}, a)$ — решение задачи Коши (2.1.7). Рассмотрим две функции

$$u(b) = f^i(\vec{x}', b) = f^i(f^i(\vec{x}, a), b),$$

$$v(b) = f^i(\vec{x}, a + b),$$

тогда в силу уравнений Ли получаем две задачи:

$$\frac{du}{db} = \xi^i(u), \quad u|_{b=0} = f^i(\vec{x}, a);$$

$$\frac{dv}{db} = \xi^i(v), \quad v|_{b=0} = f^i(\vec{x}, a).$$

Поскольку функции $u(b)$ и $v(b)$ удовлетворяют одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению и одному начальному условию, то в силу единственности решения задачи Коши приходим к равенству $u(b) = v(b)$, что равносильно групповому свойству преобразований $x^i = f^i(\vec{x}, a)$.

Для группы преобразований растяжений на плоскости (2.1.2) имеем

$$\xi_1 = \frac{\partial x'}{\partial a}|_{a=0} = x, \quad \xi_2 = \frac{\partial y'}{\partial a}|_{a=0} = 2y, \quad (2.1.11)$$

поэтому задача Коши для системы уравнений Ли имеет вид

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = x', \quad x'|_{a=0} = 0, \quad \frac{\partial y'}{\partial a} = 2y', \quad y'|_{a=0} = 0. \quad (2.1.12)$$

Решая задачу (2.1.12), можно найти однопараметрическую группу преобразований (2.1.2). Таким образом, зная группу преобразований в силу определения (2.1.5), можно найти компоненты касательного векторного поля и, наоборот, задаваясь компонентами касательного векторного поля и затем решая задачу Коши для уравнений Ли, можно восстановить группу преобразований.

2.2. Инварианты. Инфинитезимальный оператор группы преобразований

Возьмем функцию $F(\vec{x})$, определенную в некоторой области R^N .

Определение 2.2. Функция $F(\vec{x})$ является инвариантом группы преобразований $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$, если для всех допустимых

\vec{x} и a выполняется равенство

$$F(\vec{x}') = F(\vec{x}). \quad (2.2.1)$$

Справедлива теорема, которая является критерием инвариантности для функции $F(\vec{x})$.

Теорема 2.2. *Функция $F(\vec{x})$ является инвариантом относительно группы преобразований $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению*

$$\xi^i(\vec{x}) \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x^i} = 0. \quad (2.2.2)$$

Доказательство. Пусть $F(\vec{x})$ удовлетворяет условию (2.2.1), тогда

$$\begin{aligned} F(\vec{f}(\vec{x}, a)) &= F(\vec{x} + \vec{\xi}a + o(a)) = \\ &= F(\vec{x}) + a \xi^i(\vec{x}) \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x^i} + o(a). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Откуда следует, что при условии (2.2.1) выполняется (2.2.2).

Пусть теперь $F(\vec{x})$ — решение уравнения (2.2.2), тогда, поскольку оно справедливо для любой точки, запишем его для $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$:

$$\xi^i(\vec{x}') \frac{\partial F(\vec{x}')}{\partial x'^i} = 0.$$

Это условие можно представить в виде

$$\frac{dF(\vec{x}')}{da} = \frac{\partial F(\vec{x}')}{\partial x'^i} \frac{df^i(\vec{x}, a)}{da} = \xi^i(\vec{x}') \frac{\partial F(\vec{x}')}{\partial x'^i} = 0$$

и, следовательно, $F(\vec{x}')$ как функция от a является решением задачи Коши:

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad F|_{a=0} = F(\vec{x}),$$

откуда получаем условие (2.2.1).

В критерии инвариантности (2.2.2) появился оператор

$$X = \sum_{i=1}^N \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.2.4)$$

который действует на функцию $F(\vec{x})$.

Определение 2.3. Оператор (2.2.4) называется *инфинитезимальным оператором группы G* .

Координаты касательного векторного поля ξ^i называются также координатами инфинитезимального оператора. В определении оператора X слово “инфинитезимальный” часто опускается и тогда говорят об операторе группы G .

Критерий инвариантности (2.2.2) представляет собой линейное однородное уравнение первого порядка в частных производных, решением которого является функция от $N - 1$ функционально независимых инвариантов. Любой другой инвариант является функцией от независимых инвариантов.

В качестве независимых инвариантов можно взять первые интегралы

$$I_1(\vec{x}) = c_1, \dots, I_{N-1}(\vec{x}) = c_{N-1}$$

системы уравнений

$$\frac{dx^i}{\xi^1(\vec{x})} = \frac{dx^2}{\xi^2(\vec{x})} = \dots = \frac{dx^N}{\xi^N(\vec{x})}, \quad (2.2.5)$$

полученной как решения уравнения в частных производных

$$\xi^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \dots + \xi^N \frac{\partial F}{\partial x^N} = 0. \quad (2.2.6)$$

Выше мы говорили о том, что задание компонент касательного векторного поля эквивалентно заданной однопараметрической группе преобразований. При известном касательном векторном поле можно построить соответствующий инфинитезимальный оператор и определить из решения системы уравнений (2.2.5)

базисные инварианты и функции, которые являются инвариантами относительно соответствующей группы преобразований.

В качестве примера рассмотрим группу преобразований растяжения в R^N :

$$x'^i = x^i \exp(\lambda^i a), \quad (2.2.7)$$

где $(\lambda^i$ — постоянные, $i = 1, \dots, N)$, для которой компоненты касательного векторного поля выражаются формулами

$$\xi^i = \lambda^i x^i. \quad (2.2.8)$$

При этом оператор группы преобразований растяжения имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^N \lambda^i x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \lambda^i x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.2.9)$$

Инварианты группы преобразований растяжения находятся как решения системы уравнений

$$\frac{dx^1}{\lambda^1 x^1} = \frac{dx^2}{\lambda^2 x^2} = \dots = \frac{dx^N}{\lambda^N x^N} \quad (2.2.10)$$

и выражаются формулами:

$$I_1 = \frac{x^1}{(x^2)^{a_2}}, \quad I_2 = \frac{x^1}{(x^3)^{a_3}}, \quad \dots, \quad I_{N-1} = \frac{x^1}{(x^N)^{a_N}}, \quad (2.2.11)$$

$$a_k = \lambda_1 / \lambda_k.$$

Функции, которые зависят от инвариантов (2.2.11), являются инвариантами в R^N относительно группы преобразований растяжения (2.2.7).

В качестве второго примера возьмем группу преобразований вращения на плоскости $R^2(x, y)$. Компоненты касательного векторного поля для этого случая имеют вид

$$\xi^1 = \frac{\partial x'}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -y, \quad \xi^2 = \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = x. \quad (2.2.12)$$

Оператор группы преобразований вращения на плоскости $R^2(x, y)$ выражается формулой

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.2.13)$$

Решение уравнения

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \quad (2.2.14)$$

дает инвариант

$$I = x^2 + y^2, \quad (2.2.15)$$

который показывает, что любая функция от $x^2 + y^2$ будет являться инвариантом относительно группы преобразований вращения на плоскости.

2.3. Инвариантные уравнения

Пусть задана $(N - s)$ -мерная поверхность $M \in R^n$ следующей системой уравнений

$$F_1(\vec{x}) = 0, \dots, F_s(\vec{x}) = 0, \quad s \leq N. \quad (2.3.1)$$

Предположим, что ранг матрицы

$$\left\| \frac{\partial F_k}{\partial x^i} \right\|_M \quad (k = 1, \dots, s; i = 1, \dots, N)$$

равен s .

Определение 2.4. Поверхность M , заданная системой уравнений (2.3.1), называется инвариантной относительно группы преобразований $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$, если в результате отображения каждая точка остается на этой поверхности.

Если поверхность инвариантна относительно соответствующей группы преобразований и \vec{x} — решение системы уравнений

(2.3.1), то $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, a)$ будет также решением той же системы уравнений

$$F_k(\vec{x}') = 0, \quad (k = 1, \dots, s). \quad (2.3.2)$$

При этом говорят, что система уравнений (2.3.1) инвариантна относительно группы преобразований G или что эта система уравнений допускает группу преобразований G .

Справедливы две важные теоремы, которые приведем без доказательства.

Теорема 2.3. Система уравнений (2.3.1) инвариантна относительно группы преобразований G тогда и только тогда, когда

$$XF_k|_M = 0 \quad (k = 1, \dots, s). \quad (2.3.3)$$

Доказательство необходимого условия этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.2., а доказательство достаточного условия можно посмотреть в [30, 31].

Теорема 2.4. Поверхность M , заданная системой уравнений (2.3.1), инвариантна относительно некоторой группы преобразований G , может быть задана системой уравнений выраженной через независимые инварианты группы, если инфинитезимальный оператор не обращается в ноль на поверхности M .

Суть этой теоремы выражает тот факт, что поверхность M может быть записана в виде

$$\Phi_k(I_1, \dots, I_{N-1}) = 0, \quad (k = 1, \dots, s), \quad (2.3.4)$$

где $I_1(\vec{x}), \dots, I_{N-1}(\vec{x})$ — инварианты группы преобразований G .

2.4. Групповой анализ дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения содержат независимые, зависимые переменные и производные. Предположим, что в E^{n+m} число независимых переменных n : $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$, а число зависимых переменных m : $\vec{u} = (u^1, \dots, u^m)$. Причем они преобразуются в соответствии с формулами

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, a), \\ \vec{u}' &= \vec{g}(\vec{x}, \vec{u}, a).\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Пусть семейства преобразований (2.4.1) удовлетворяют групповым свойствам и являются однопараметрическими группами преобразований Ли.

Поскольку в дифференциальные уравнения входят производные от координат вектора \vec{u} по компонентам вектора \vec{x} , то введем дополнительные переменные

$$\vec{u}_1 = (u_i^k) \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m).\tag{2.4.2}$$

Эти координаты являются производными 1-го порядка

$$u_i^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}.$$

В зависимости от порядка дифференциального уравнения могут быть введены также переменные, являющиеся вторыми производными:

$$\vec{u}_2 = (u_{ij}^k) \quad (i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m),\tag{2.4.3}$$

и т.д.

Когда точка в E^{n+m} преобразуется в соответствии с (2.4.1), то при этом преобразуются и производные. Предположим, что компоненты u_i^k преобразуются по формуле:

$$u_i^k = h_i^k(\vec{x}, \vec{u}, \vec{u}_1, a).\tag{2.4.4}$$

Введем пространство E^N , где $N = n + m + nm$, в котором точка имеет координаты (x^i, u^k, u_i^k) . Семейство преобразований (2.4.1) и (2.4.4) образует продолженную группу G_1 . Если инфинитезимальный оператор группы G имеет вид

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m), \quad (2.4.5)$$

то оператор группы G_1 , продолженный на пространство E^N , представляется в виде

$$X_1 = X + \xi_i^k \frac{\partial}{\partial u_i^k} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \xi_i^k \frac{\partial}{\partial u_i^k}. \quad (2.4.6)$$

Координаты касательного векторного поля в этой формуле определяются, как и прежде:

$$\xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial a} \Big|_{a=0}, \quad \eta^k = \frac{\partial g^k}{\partial a} \Big|_{a=0}, \quad \xi_i^k = \frac{\partial h_i^k}{\partial a} \Big|_{a=0}. \quad (2.4.7)$$

Поскольку решение дифференциального уравнения является соотношением между $\vec{u} = \vec{\varphi}(\vec{x})$, то компоненты ξ_i^k можно выразить через ξ^i и η^k .

Решение дифференциального уравнения в преобразованных координатах имеет вид соотношения

$$\vec{u}' = \vec{\varphi}'(\vec{x}'),$$

которое можно записать в виде

$$\vec{g}(\vec{x}, \vec{u}, a) = \vec{\varphi}'\left(\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, a)\right). \quad (2.4.8)$$

После введения переменных $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots$, дифференциальное уравнение может рассматриваться как алгебраическое уравнение от переменных $\vec{x}, \vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ и т. д., некоторые переменные в котором связаны дифференциальными соотношениями.

При переходе от переменных x^i к новым переменным x'^i операторы дифференцирования связаны соотношениями

$$D_i = D_i f^j D'_j, \quad (2.4.9)$$

где

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^p \frac{\partial}{\partial u^p} + u_{ij}^p \frac{\partial}{\partial u_j^p} + \dots \quad (2.4.10)$$

В последней формуле дифференцирование обрывается на производных, которые встречаются в дифференциальном уравнении.

Дифференцируя соотношение (2.4.8) по переменной x^i , имеем

$$D_i g^k = u_j'^k D_i f^j.$$

Дифференцируя последнее выражение по a и полагая $a = 0$, приходим к выражению

$$D_i \eta^k = \xi_j^k \delta_{ij} + u_j^k D_i \xi^j \quad (i = 1, \dots, n; k, j = 1, \dots, m), \quad (2.4.11)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Из (2.4.11) имеем

$$\xi_i^k = D_i \eta^k - u_j^k D_i \xi^j. \quad (2.4.12)$$

Формулы для второго, третьего и более высших продолжений могут быть получены аналогичным путем. Например, координаты ξ_{ij}^k вычисляются по формулам

$$\xi_{ij}^k = D_j \left(\xi_i^k \right) - u_{il}^k D_j \left(\xi^l \right). \quad (2.4.13)$$

Как следует из предложенных выражений, для построения продолженного оператора X_1 требуется знать координаты ξ^i и η^k оператора X .

Соответственно, дифференциальное уравнение p -го порядка можно рассматривать как некоторую поверхность в пространстве переменных x, u, \dots, u_p :

$$F\left(\vec{x}, \vec{u}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\right) = 0. \quad (2.4.14)$$

При этом симметрия дифференциальных уравнений исследуется, как симметрия алгебраических уравнений от переменных x, u, u_1, \dots, u_p .

Пусть X_p будет инфинитезимальным оператором продолженной группы G_p , тогда обобщение теоремы 2.3 на случай дифференциального многообразия (2.4.14) приводит к критерию инвариантности в виде

$$X_p F\left(\vec{x}, \vec{u}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\right)|_{F=0} = 0. \quad (2.4.15)$$

Определение 2.5. Уравнение (2.4.15), полученное в результате действия оператора X_p на дифференциальное многообразие (2.4.14), называется определяющим уравнением.

Вследствие независимости компонент векторов $\vec{u}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ и их произведений уравнение расщепляется на переопределенную систему уравнений, из которой находятся координаты векторного поля ξ^i и η^k . Определяющее уравнение (2.4.15) всегда линейно относительно координат касательного векторного поля, и поэтому задача нахождения группы преобразований G также является линейной, что особенно важно при анализе нелинейных дифференциальных уравнений. Линейность определяющего уравнения относительно координат касательного векторного поля следует из линейности оператора X_p группы преобразований G_p продолженного пространства.

Остановимся на алгоритме, который используется для отыскания группы преобразований, допускаемой дифференциальным

уравнением. Условно этот алгоритм можно разделить на три части: получение определяющих уравнений, определение координат касательного векторного поля и определение множества инфинитезимальных операторов, которые допускаются исходным дифференциальным уравнением.

Для того чтобы найти определяющее уравнение, зададим оператор X с компонентами касательного векторного поля ξ^i и η^k :

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Затем продолжим этот оператор, учитывая соответствующее число производных в исходном дифференциальном уравнении:

$$X_p = X + \xi_k^i \frac{\partial}{\partial u_i^k} + \xi_{jk}^i \frac{\partial}{\partial u_{ij}^k} + \dots \quad (2.4.16)$$

В этом операторе компоненты продолженного векторного поля ξ_k^i , ξ_{jk}^i , ... определяются по формулам (2.4.12) и (2.4.13) и по формулам продолжения более высокого порядка.

Действуя оператором (2.4.16) на исходное дифференциальное уравнение, получаем определяющее уравнение. Приравнявая выражения при разных степенях координат x^i , u^k , u_i^k и т. д., приходим к системе переопределенных дифференциальных уравнений для определения компонент ξ^i и η^k . Решая эту систему уравнений, находим множество инфинитезимальных операторов, допускаемых исходным дифференциальным уравнением.

2.5. Группы преобразований, допускаемые обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка

В качестве примера рассмотрим групповой анализ обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y_{xx} = f(x, y, y_x), \quad (2.5.1)$$

где f — гладкая функция от x , y и y_x .

Решим задачу о нахождении всех групп преобразований, которые допускаются дифференциальным уравнением вида (2.5.1). В этом уравнении четыре переменные x , y , y_x и y_{xx} , поэтому размерность продолженного пространства $N = 4$.

Пусть общий вид оператора группы G , которая допускается уравнением (2.5.1), имеет вид

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.5.2)$$

Обозначая координаты касательного векторного поля за ξ_1 и ξ_{11} , имеем оператор X_2 в виде

$$X_2 = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial y_x} + \xi_{11} \frac{\partial}{\partial y_{xx}}. \quad (2.5.3)$$

Действуя X_2 на уравнение (2.5.1), получаем соотношение

$$\xi_{11} - \xi \frac{\partial f}{\partial x} - \eta \frac{\partial f}{\partial y} - \xi_1 f \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0. \quad (2.5.4)$$

Пусть для определенности $f = 0$, тогда из (2.5.3) получаем

$$\xi_{11} = 0. \quad (2.5.5)$$

По формулам первого и второго продолжения (2.4.12) и (2.4.13) находим выражения координат ξ_1 и ξ_{11} через координаты ξ и η :

$$\xi_1 = \eta_x + y_x \eta_y - y_x (\xi_x + y_x \xi_y) = \eta_x + y_x (\eta_y - \xi_x) - y_x^2 \xi_y, \quad (2.5.6)$$

$$\begin{aligned} \xi_{11} = D_x (\xi_1) - y_{xx} D_x (\xi) = & \eta_{xx} + y_{xx} (\eta_y - \xi_x) + \\ & + y_x (\eta_{yx} - \xi_{xx}) - 2y_x y_{xx} \xi_y - (y_x)^2 \xi_{xy} + \\ & + y_x \left[\eta_{xy} + y_x (\eta_{yy} - \xi_{xy}) - (y_x)^2 \xi_{yy} \right] - \\ & - y_{xx} (\xi_x + y_x \xi_y). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Из выражения (2.5.7) следует, что дифференциальному уравнению второго порядка

$$y_{xx} = 0 \quad (2.5.8)$$

соответствует определяющее уравнение в виде:

$$\eta_{xx} + y_x (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + y_x^2 (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - (y_x)^3 \xi_{yy} = 0, \quad (2.5.9)$$

из которого получаем расщепленные уравнения относительно координат ξ и η в виде

$$\eta_{xx} = 0, \quad \xi_{yy} = 0, \quad 2\eta_{yx} - \xi_{xx} = 0, \quad \eta_{yy} - 2\xi_{yx} = 0. \quad (2.5.10)$$

Из первого и второго уравнений (2.5.10) имеем

$$\eta = \varphi_1(y)x + \varphi_2(y),$$

$$\xi = \Psi_1(x)y + \Psi_2(x).$$

Подставляя эти выражения в третье и четвертое уравнения, получаем равенства

$$2\varphi_{1y} = \Psi_{1xx}y + \Psi_{2xx}, \quad (2.5.11)$$

$$\varphi_{1yy}x + \varphi_{2yy} = 2\Psi_{1x},$$

откуда находим

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &= c_1x + c_2, \\ \Psi_2(x) &= c_3x^2 + c_4x + c_5, \\ \varphi_1(y) &= c_3y + c_6, \\ \varphi_2(y) &= c_1y^2 + c_7y + c_8.\end{aligned}\tag{2.5.12}$$

Координаты касательного векторного поля ξ и η с учетом (2.5.12) выражаются формулами

$$\xi(x, y) = (c_1x + c_2)y + c_3x^2 + c_4x + c_5,\tag{2.5.13}$$

$$\eta(x, y) = (c_3y + c_6)x + c_7y + c_8 + c_1y^2.\tag{2.5.14}$$

В выражениях c_i ($i = 1, \dots, 8$) — произвольные постоянные.

Полагая постоянные c_i в (2.5.13) и в (2.5.14) последовательно равными единице, а остальные нулю, получаем операторы, которые допускаются уравнением (2.5.8):

$$\begin{aligned}X_1 &= xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}, & X_2 &= y\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 &= x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, & X_4 &= x\frac{\partial}{\partial x}, & X_5 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_6 &= x\frac{\partial}{\partial y}, & X_7 &= y\frac{\partial}{\partial y}, & X_8 &= \frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2.5.15}$$

Операторы (2.5.15) соответствуют полной симметрии обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Анализируя полученные операторы можно видеть, что некоторые из них могут быть определены непосредственно из исходного дифференциального уравнения.

2.6. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группы преобразований

Одним из достижений группового анализа дифференциальных уравнений явилось то, что Софусу Ли удалось показать, что большинство подходов, использованных при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений, могут быть получены с помощью теории групп.

В качестве примера рассмотрим доказательство того, что уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (2.6.1)$$

(где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — некоторые функции от x и y) может быть проинтегрировано с помощью интегрирующего множителя.

Уравнение (2.6.1) можно записать в виде

$$Q(x, y) dx - P(x, y) dy = 0, \quad (2.6.2)$$

которое равносильно уравнению в частных производных первого порядка

$$P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2.6.3)$$

в том смысле, что интеграл $F(x, y) = C$ (C — постоянная) является решением уравнения (2.6.3) и, наоборот, всякое решение уравнения (2.6.3) — решение уравнения (2.6.2).

Предположим, что уравнение (2.6.2) допускает некоторую группу преобразований с инфинитезимальным оператором в виде

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.6.4)$$

Под действием этого оператора всякое решение $F(x, y) = C_1$ уравнения (2.6.3) переходит снова в решение, так что решением

(2.6.3) будет также интеграл $XF = C_2$. Однако поскольку уравнение (2.6.2) является уравнением 1-го порядка, то эти решения функционально зависимы, и поэтому

$$\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = f(F). \quad (2.6.5)$$

Учитывая (2.6.3) и (2.6.5) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{Qf}{\xi Q - \eta P}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{Pf}{\xi Q - \eta P}.$$

Откуда приходим к выражению

$$\frac{Qdx - Pdy}{\xi Q - \eta P} = \frac{dF}{f(F)}, \quad (2.6.6)$$

являющемуся полным дифференциалом.

Соотношение (2.6.6) приводит к результату Софуса Ли: оператор (2.6.4) допускается уравнением (2.6.2) тогда и только тогда, когда функция

$$\mu = \frac{1}{\xi Q - \eta P} \quad (2.6.7)$$

является его интегрирующим множителем. Поэтому, зная какой-либо оператор, допускаемый уравнением 1-го порядка по формуле (2.6.7), можно найти интегрирующий множитель.

Используя этот подход, проинтегрируем уравнение Рикатти, имеющее вид [32]:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{2}{x^2}. \quad (2.6.8)$$

Подставляя $x' = ax$, $y' = by$, находим, что уравнение (2.6.8) будет инвариантным, если $b = 1/a$, и поэтому оно допускает группу преобразований растяжения

$$x' = xe^\alpha, \quad y' = ye^{-\alpha}. \quad (2.6.9)$$

Инфинитезимальный оператор, соответствующий преобразованиям (2.6.9) имеет вид

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.6.10)$$

Уравнение (2.6.8) можно представить в виде

$$dy + \left(y^2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = 0. \quad (2.6.11)$$

Интегрирующий множитель для (2.6.11) находим по формуле (2.6.7)

$$\mu = \frac{x}{x^2 y^2 - xy - 2}. \quad (2.6.12)$$

Он приводит к решению уравнения (2.6.11) в виде:

$$\frac{xy - 2}{xy + 1} = \frac{c}{x^3}. \quad (2.6.13)$$

Метод интегрирующего множителя применяется только для интегрирования уравнений первого порядка. Однако группы преобразований могут быть использованы и для интегрирования уравнений более высокого порядка, поскольку они часто подсказывают упрощающую замену переменных. Применение этого подхода основано на следующей теореме [30, 32].

Теорема 2.5. *Всякая однопараметрическая локальная группа преобразований $x'^i = f^i(\vec{x}, a)$ в R^N с помощью некоторой невырожденной замены переменных $z^i = z^i(\vec{x})$ может быть приведена к группе переноса.*

Доказательство. Пусть группе преобразований $x' = f^i(\vec{x}, a)$ ($i = 1, \dots, N$) соответствует оператор

$$X = \xi^i(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.6.14)$$

Этот оператор может быть представлен в виде

$$\tilde{X} = X(z^i) \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad (2.6.15)$$

если использовать соотношение

$$\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial z^j}. \quad (2.6.16)$$

Выбирая в качестве новых переменных любой набор $N - 1$ функционально независимых инвариантов

$$Z^1 = I_1(\vec{x}), \quad Z^2 = I_2(\vec{x}), \quad \dots, \quad Z^{N-1} = I_{N-1}(\vec{x}),$$

а в качестве Z^N переменную, которая находится из уравнения

$$X(z) = 1, \quad (2.6.17)$$

получим набор переменных, определяющих группу преобразований вдоль оси Z^N .

Рассмотрим интегрирование уравнения (2.6.8) с помощью соответствующей замены переменных. Уравнение (2.6.8) допускает оператор (2.6.10), который в соответствии с вышедоказанной теоремой приводит к группе преобразований переноса после замены

$$t = t(x, y), \quad u = u(x, y), \quad (2.6.18)$$

которая находится из системы уравнений

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (2.6.19)$$

$$x \frac{\partial t}{\partial x} - y \frac{\partial t}{\partial y} = 1. \quad (2.6.20)$$

В качестве одной из переменных можно взять инвариант

$$u = xy, \quad (2.6.21)$$

а в качестве второй переменной получаем

$$t = \ln x. \quad (2.6.22)$$

Эта замена приводит группу преобразований растяжений к группе преобразований переноса вдоль оси x , поскольку

$$\begin{aligned} t' &= \ln x' = \ln x + a = t + a, \\ u' &= \frac{y'}{x'^2} = \frac{y}{x^2} = u. \end{aligned}$$

Подставляя (2.6.21) в уравнение (2.6.8), приходим к уравнению

$$\frac{du}{dt} + u^2 - u - 2 = 0, \quad (2.6.23)$$

которое в результате интегрирования дает решение

$$\ln \frac{u+1}{u-2} = 3t + c,$$

имеющее в старых переменных вид

$$y = \frac{2x^3 + c}{x(x^3 - c)}. \quad (2.6.24)$$

Рассмотренный способ, указывающий упрощающую замену переменных, обладает универсальностью и может использоваться, как для интегрирования уравнений первого порядка, так и для понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений второго и выше порядков.

2.7. Группы преобразований для линейного уравнения теплопроводности

Найдем группы преобразований, которые допускаются линейным уравнением теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (2.7.1)$$

Здесь u — температура среды, которая зависит от x и t , a^2 — коэффициент температуропроводности.

Общий вид инфинитезимального оператора можно представить формулой

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.7.2)$$

где ξ^1 , ξ^2 и η — координаты касательного векторного поля, которые требуется найти. Оператор, продолженный на вторые производные, можно записать в виде:

$$X_2 = X + \xi_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial u_t} + \xi_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}. \quad (2.7.3)$$

Действуя оператором (2.7.3) на уравнение (2.6.1), получаем соотношение

$$\xi_2 - a^2 \xi_{11} = 0, \quad (2.7.4)$$

в котором производные u_t и u_{xx} связаны уравнением (2.6.1). Находим выражения для ξ_1 , ξ_2 и ξ_{11} через ξ^1 , ξ^2 и η .

Поскольку

$$\xi_1 = D_x(\eta) - u_x D_x(\xi^1) - u_t D_x(\xi^2),$$

$$\xi_2 = D_t(\eta) - u_x D_t(\xi^1) - u_t D_t(\xi^2),$$

$$\xi_{11} = D_x(\xi_1) - u_{xx} D_x(\xi^1) - u_{xt} D_x(\xi^2),$$

то

$$\xi_1 = \eta_x + u_x \eta_u - u_x \xi_x^1 - (u_x)^2 \xi_u^1 - a^2 u_{xx} \xi_x^2 - a^2 u_x u_{xx} \xi_u^2, \quad (2.7.5)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \eta_t + a^2 u_{xx} \eta_u - u_x \xi_t^1 - a^2 u_x u_{xx} \xi_u^1 - \\ & - a^2 u_{xx} \xi_t^2 - a^4 (u_{xx})^2 \xi_u^2, \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

$$\begin{aligned}
\xi_{11} &= \xi_{1x} + u_x \xi_{1u} - u_{xx} \xi_x^1 - u_x u_{xx} \xi_u^1 - a^2 u_{xxx} \xi_x^2 - a^2 u_x u_{xxx} \xi_u^2 = \\
&= \eta_{xx} + u_{xx} \eta_u + u_x \eta_{ux} - u_{xx} \xi_x^1 - u_x \xi_{xx}^1 - 2u_x u_{xx} \xi_u^1 - \\
&- 2(u_x)^2 \xi_{ux}^1 - a^2 u_{xxx} \xi_x^2 - a^2 u_{xx} \xi_{xx}^2 - a^2 (u_{xx})^2 \xi_u^2 - \quad (2.7.7) \\
&- a^2 u_x u_{xxx} \xi_u^2 - a^2 u_x u_{xx} \xi_{ux}^2 + u_x \eta_{xu} + (u_x)^2 \eta_{uu} - \\
&- (u_x)^2 \xi_{xu}^1 - (u_x)^3 \xi_{uu}^1 - a^2 u_x u_{xx} \xi_{xu}^2 - a^2 (u_x)^2 u_{xx} \xi_{uu}^2 - \\
&- u_{xx} \xi_x^1 - u_x u_{xx} \xi_u^1 - a^2 u_{xxx} \xi_x^2 - a^2 u_x u_{xxx} \xi_u^2.
\end{aligned}$$

Подставляя (2.7.6) и (2.7.7) в определяющее уравнение (2.7.4) и приводя подобные члены, получим уравнение:

$$\begin{aligned}
&(\eta_t - a^2 \eta_{xx}) + u_x (-\xi_t^1 + a^2 \xi_{xx}^1 - 2a^2 \eta_{ux}) + \\
&+ (u_x)^2 (3a^2 \xi_{ux}^1 - a^2 \eta_{uu}) + (u_x)^3 a^2 \xi_{uu}^1 + \\
&+ u_{xx} (-a^2 \xi_t^2 + 2a^2 \xi_x^1 + a^4 \xi_{xx}^2) + \quad (2.7.8) \\
&+ u_x u_{xx} (3a^2 \xi_u^1 - a^2 \xi_u^2 + 2a^4 \xi_{ux}^2) + \\
&+ u_{xxx} 2a^4 \xi_x^2 + u_x u_{xxx} 2a^4 \xi_u^2 + (u_x)^2 u_{xx} a^4 \xi_{uu}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Откуда находим уравнения для определения координат ξ^1, ξ^2 и η :

$$\xi_u^2 = \xi_x^2 = 0, \quad \xi_u^1 = 0, \quad \xi_{xx}^1 = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \quad (2.7.9)$$

$$\eta_t = a^2 \eta_{xx}, \quad \xi_t^2 = 2\xi_x^1, \quad \xi_t^1 = -2a^2 \eta_{ux}. \quad (2.7.10)$$

Из уравнений (2.7.9) находим

$$\xi^2 = \Psi(t), \quad (2.7.11)$$

$$\xi^1 = \varphi_1(t) + x\varphi_2(t), \quad (2.7.12)$$

$$\eta = b(x, t) + ub_1(x, t). \quad (2.7.13)$$

Подставив полученные соотношения во второе и третье уравнение (2.7.10), имеем

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\Psi_t, \quad (2.7.14)$$

$$b_1(x, t) = \varphi(t) - \frac{x^2}{2a^2} \cdot \varphi_{1t} - \frac{x^2}{8a^2}\Psi_{tt}.$$

Принимая во внимание эти выражения, из первого уравнения (2.7.10) приходим к соотношениям

$$b_t = a^2 b_{xx},$$

$$\varphi_t = -\frac{1}{4}\Psi_{tt}, \quad (2.7.15)$$

$$\varphi_{1tt} = 0, \quad \Psi_{ttt} = 0.$$

Откуда находим

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= B_2 + 2B_3t + B_6t^2, \\ \varphi_1(t) &= B_1 + B_4t, \\ \varphi(t) &= B_5 - \frac{1}{2}B_6t. \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

Таким образом, координаты касательного векторного поля ξ^1 , ξ^2 и η принимают вид

$$\begin{aligned} \xi^1 &= B_1 + B_4t + (B_3 + B_6t)x, \\ \xi^2 &= B_2 + 2B_3t + B_6t^2, \\ \eta &= b(x, t) + B_5u - \left(\frac{1}{2}B_6t + \frac{B_4x}{2a^2} + \frac{B_6x^2}{4a^2} \right)u, \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

где B_1, \dots, B_6 — произвольные постоянные, $b(x, t)$ — произвольная функция, которая удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.7.1).

Полагая $B_i = 0$ ($i = 1, \dots, 6$) из (2.7.17) находим бесконечное число операторов

$$X_\infty = b(x, t) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.7.18)$$

которые допускаются линейным уравнением теплопроводности (2.7.1). Из оператора (2.7.18) следует семейство преобразований

$$u'(x, t) = a b(x, t) + u(x, t), \quad x' = x, \quad t' = t,$$

которое выражает свойство линейности для решений уравнения (2.7.1). Полагая $b(x, t) = 0$ и последовательно одну из постоянных $B_i = 1$, а остальные равными нулю, найдем еще шесть операторов:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_4 &= t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{xu}{2a^2} \frac{\partial}{\partial u}, & X_5 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_6 &= xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{t}{2} + \frac{x^2}{4a^2} \right) u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

Эти операторы содержат важную информацию о симметрии уравнения теплопроводности.

Используя координаты касательных векторных полей в операторах (2.7.19), можно найти группы преобразований и инварианты, соответствующие этим операторам.

Например, решая уравнения Ли

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{da} &= x', & x'(a=0) &= x, \\ \frac{dt'}{da} &= 2t', & t'(a=0) &= t \end{aligned}$$

с координатами, соответствующими оператору X_3 , находим группу преобразований растяжения, которая допускается уравнением (2.6.1):

$$x' = e^a x, \quad t' = e^{2a} t, \quad u' = u. \quad (2.7.20)$$

Откуда следуют два инварианта

$$I_1 = \frac{x'^2}{t'} = \frac{x^2}{t}, \quad I_2 = u' = u. \quad (2.7.21)$$

Эти выражения приводят к хорошо известному факту, что линейное уравнение теплопроводности (2.7.1) имеет инвариантное решение в виде

$$u = C_1 w(z), \quad z = \frac{C_2 x}{t^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.7.22)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Аналогично, используя операторы (2.7.19), можно найти и другие группы преобразований, которые соответствуют уравнению (2.7.1).

2.8. Группы преобразований для нелинейного уравнения теплопроводности

Для нелинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.8.1)$$

группа преобразований находится аналогично, как это было сделано для уравнения (2.7.1).

Пусть оператор X представляется в виде

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.8.2)$$

где ξ^1 , ξ^2 и η — координаты касательного векторного поля, которые следует найти. Предполагая, что

$$X_2 = X + \xi_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial u_t} + \xi_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad (2.8.3)$$

и действуя этим оператором на уравнение (2.8.1), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \xi_2 - n(n-1)(u_x)^2 u^{n-2} \eta - 2nu^{n-1} u_x \xi_1 - \\ - nu^{n-1} u_{xx} \eta - u^n \xi_{11} = 0. \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

Вычисляя по формулам продолжения компоненты ξ^1 , ξ^2 и ξ_{11} и подставляя выражения для них в определяющее уравнение (2.8.4), получаем четыре независимых оператора

$$\begin{aligned} X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_4 = \frac{nx}{2} \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

В случае $n = -4/3$ уравнение (2.8.1) допускает дополнительный к (2.8.5) оператор в виде

$$X_5 = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3xu \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.8.6)$$

Уравнение (2.8.1) при $n = 0$ переходит в линейное уравнение (2.7.1), имеющее группу преобразований, представленную в предыдущем параграфе.

Заметим, что поскольку операторы группы преобразований линейные, то, кроме “основных” операторов (2.8.5), уравнением (2.8.1) допускается и произвольная сумма их, умноженная на постоянные коэффициенты. Например, уравнение (2.8.1) допускает оператор

$$X = \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.8.7)$$

который ведет к инвариантам

$$\xi = x - c_0 t, \quad u(x, t) = v,$$

и поэтому уравнение (2.8.1) имеет частное решение в виде

$$u(x, t) = v(\xi), \quad \xi = x - c_0 t. \quad (2.8.8)$$

Отсюда получаем важный результат: для того, чтобы исходное уравнение с двумя независимыми переменными x и t имело решение в переменных бегущей волны, оно должно быть инвариантным относительно группы преобразований сдвига по x и по t .

Аналогично, используя оператор

$$X = \frac{1}{\gamma} X_3 + X_4,$$

находим два инварианта

$$I_1 = u \cdot t^{-\frac{\gamma}{2}}, \quad I_2 = x \cdot t^{-\frac{2+n\gamma}{4}}. \quad (2.8.9)$$

Откуда следует, что уравнение (2.8.1) имеет инвариантное решение

$$I_1 = F(I_2),$$

поэтому одно из его частных решений можно представить формулой

$$u = t^{\frac{\gamma}{2}} F(\theta), \quad \theta = xt^{-\frac{2+n\gamma}{4}}. \quad (2.8.10)$$

При $\gamma = 0$ получаем, что уравнение (2.8.1) имеет также инвариантное решение в виде:

$$u = F(\theta), \quad \theta = xt^{-1/2}. \quad (2.8.11)$$

Это решение соответствует оператору X_3 .

2.9. Группы преобразований для уравнения Кортевега—де Вриза

Для уравнения Кортевега—де Вриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.9.1)$$

Группа преобразований ищется путем продолжения оператора x до третьих производных

$$X_3 = X + \xi_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial u_t} + \xi_{111} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}}, \quad (2.9.2)$$

где X имеет также вид (2.8.2).

Действуя X_3 на уравнение (2.9.1), получаем соотношение в виде

$$\xi_2 + \eta u_x + \xi_1 u + \xi_{111} = 0. \quad (2.9.3)$$

Вычисляя выражения координат продолженного касательного векторного поля ξ_1 , ξ_2 , ξ_{11} и ξ_{111} через ξ^1 , ξ^2 и η и подставляя эти формулы в (2.9.3), после решения определяющих уравнений находим четыре оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.9.4)$$

$$X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Первый и второй операторы в (2.9.4) соответствуют группам преобразования сдвига по переменным x и t и, следовательно, уравнение (2.9.1) также имеет решения в переменных бегущей волны. Третий оператор в (2.9.4) соответствует Галлиеву переносу, а четвертый оператор показывает, что уравнение (2.9.1) допускает группу преобразования растяжения по всем координатам. Используя оператор X_4 можно найти, что уравнение (2.9.1) может быть записано через инварианты

$$I_1 = u t^{\frac{2}{3}}, \quad I_2 = x t^{-\frac{1}{3}}, \quad (2.9.5)$$

и поэтому уравнение (2.9.1) имеет инвариантное решение в виде

$$u(x, t) = \frac{C_1}{t^{2/3}} f(\theta), \quad \theta = \frac{C_2 x}{t^{1/3}}. \quad (2.9.6)$$

Решения уравнений в частных производных инвариантные относительно группы преобразований растяжений в русскоязычной литературе часто называются автомодельными.

Глава 3

Аналитические свойства нелинейных дифференциальных уравнений

Над вопросом о том, как решать дифференциальные уравнения, многие математики размышляли со времени появления дифференциального и интегрального исчисления. Еще в начале XIX столетия было замечено что, как правило, зависимую переменную в уравнении не удастся представить никакой комбинацией известных к тому времени функций. Тогда же появилась идея попытаться расширить состав имеющихся математических функций, дополнив их новыми функциями, с помощью которых можно было бы выразить решения дифференциальных уравнений. Однако на этом пути исследователи вновь столкнулись с рядом трудностей. Это обстоятельство привело к идее исследовать решения дифференциальных уравнений, используя сами уравнения, поскольку известно, что с геометрической точки зрения их решения представляют собой некоторую линию в фазовом про-

странстве — интегральную кривую. И поэтому, используя вид самого дифференциального уравнения, можно изучить общие свойства таких интегральных кривых. Такой подход характерен для качественной теории дифференциальных уравнений.

О. Коши обратил внимание на то, что решения дифференциальных уравнений удобно рассматривать как функции комплексной переменной. При этом независимая и зависимая переменные в дифференциальном уравнении предполагаются комплексными переменными и при исследовании дифференциального уравнения используются все достижения теории функций комплексного переменного. Именно с этой точки зрения и ведется исследование решений в аналитической теории дифференциальных уравнений.

3.1. Классификация особых точек функций комплексной переменной

Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений изучает, как правило, уравнения, которые представляют собой многочлены относительно зависимой переменной и ее производных с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями. Задачей, которая при этом ставится, является изучение свойств решений по виду самого дифференциального уравнения [1, 18, 2, 39]. Поскольку решение дифференциального уравнения рассматривается на комплексной плоскости, то поведение решения и область его существования определяется точками, где нарушается аналитичность функции.

Для дифференциального уравнения первого порядка

$$w_z = F(w, z), \quad (3.1.1)$$

рассматриваемого на комплексной плоскости, предполагается, что w и z — комплексные переменные, а F — рациональная функ-

ция по w и аналитическая в некоторой области по z . Для уравнения (3.1.1) в аналитической теории дифференциальных уравнений ищется решение, принимающее при $z = z_0$ начальное значение $w = w_0$, где z_0 и w_0 — два заданных комплексных числа.

Теоремы существования и единственности, которые переносятся на уравнение от комплексной переменной, определяют его решение внутри некоторой окружности и задают элемент аналитической функции, и если он удовлетворяет дифференциальному уравнению, то этому же уравнению удовлетворяют и аналитические продолжения этого элемента на всю область. Поэтому аналитическая функция в целом есть также решение того же дифференциального уравнения.

Определение 3.1. *Точки комплексной плоскости, в которых однозначная функция $w(z)$ не является аналитической, называются особыми.*

В теории функций комплексной переменной, как правило, рассматривают особые точки однозначных функций, однако решения дифференциальных уравнений очень часто являются многозначными функциями, и поэтому ниже дается классификация особых точек произвольных аналитических функций, которая впервые была предложена Пенлеве [2, 18].

Прежде всего, эта классификация основана на числе значений, которые принимает функция при обходе вокруг особой точки.

Определение 3.2. *Особая точка $z = z_0$ функции $w(z)$ называется критической особой точкой, если при обходе этой точки значение функции $w(z)$ меняется.*

В противном случае особая точка z_0 функции $w(z)$ называется некритической.

Пусть n — наименьшее целое число ($n > 1$), такое, что после n -кратного обхода точки $z = z_0$ значение функции $w(z)$ возвращается к первоначальному значению. Тогда при введении новой переменной t по формуле $z = z_0 + t^n$ функция $w(t)$ является однозначной функцией переменной t . Тогда, если вблизи $t = 0$ имеем

разложение

$$w(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \quad (3.1.2)$$

то $w(z)$ выражается через z в виде

$$w(z) = a_0 + a_1 (z - z_0)^{\frac{1}{n}} + a_2 (z - z_0)^{\frac{2}{n}} + \dots \quad (3.1.3)$$

и точка z_0 называется *критической алгебраической точкой*.

В случае если $w(t)$ представима в виде

$$w(t) = a_{-m} t^{-m} + \dots + a_{-1} t^{-1} + a_0 + \dots, \quad (3.1.4)$$

то для $w(z)$ имеем

$$w(z) = a_{-m} (z - z_0)^{-\frac{m}{n}} + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{-\frac{1}{n}} + a_0 + \dots \quad (3.1.5)$$

и точка $z = z_0$ называется *критическим полюсом*.

Определение 3.3. Алгебраическими особыми точками функции $w(z)$ называются критические алгебраические точки, полюсы и критические полюсы.

Примером критической алгебраической особой точки является точка $z = 0$ функции \sqrt{z} . Функция $1/z$ имеет также особую точку $z = 0$ в виде простого полюса, который относится к типу некритических особых точек алгебраических функций.

Пусть $z = z_0$ — неалгебраическая особая точка функции $w(z)$ и пусть Δ_ρ — замыкание множества значений функции $w(z)$, которое она принимает в окрестности $\rho > 0$ точки z_0 . Введем следующие определения.

Определение 3.4. Множество $E_{z_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta_\rho = \bigcap_{\rho > 0} \Delta_\rho$ в случае монотонной зависимости Δ_ρ от ρ ($\Delta_\rho \subset \Delta'_\rho$ при $0 < \rho < \rho'$) будем называть областью неопределенности функции $w(z)$ в особой точке $z = z_0$.

Определение 3.5. Особая точка z_0 функции $w(z)$ называется трансцендентной особой точкой, если множество неопределенности E_{z_0} состоит из одной точки.

Определение 3.6. Особая точка z_0 функции $w(z)$ называется существенно особой точкой, если множество неопределенности E_{z_0} содержит более одной точки.

Примером трансцендентной особой точки служит точка $z = 0$ для функции $w = \ln z$, поскольку, подходя к этой точке по любому пути, $\ln z$ стремится к бесконечности, и поэтому область неопределенности состоит из одной точки. Точка $z = 0$ для функций $w = e^{1/z}$ или для $w = \sin \frac{1}{\sqrt{z}}$ является примером существенно особой точки.

Предложенная классификация относится не только к изолированным особым точкам, но и к особым точкам, образующим линии. Примеры функций, имеющих особые точки на линиях даются в книге [18].

3.2. Неподвижные и подвижные особые точки

Рассмотренная выше классификация типов особых точек дана без учета природы функций комплексной переменной. Теперь остановимся на классификации особых точек решений дифференциальных уравнений на комплексной плоскости. Немецкий ученый Л. Фукс разделил их по их отношению к начальным условиям, поскольку одни особые точки решений могут зависеть от начальных данных, другие — нет.

Определение 3.7. Особые точки решений дифференциальных уравнений на комплексной плоскости, положение которых не зависит от начальных данных, определяющих решение, называются неподвижными особыми точками.

Определение 3.8. Особые точки решений дифференциальных уравнений, зависящие от начальных данных, называются подвижными особыми точками.

Рассмотрим пример. Пусть на плоскости с начальной скоростью v_0 движется тело при действии силы сопротивления, за-

висящей от квадрата скорости. Сила сопротивления направлена против движения, и поэтому дифференциальное уравнение для движущегося тела в соответствии со вторым законом Ньютона имеет вид

$$v_t = -kv^2, \quad (3.2.1)$$

где k — постоянная.

Решением этого уравнения является множество функций

$$v = \frac{1}{c_1 + tk}, \quad (3.2.2)$$

где c_1 — произвольная постоянная. При условии, что $v(t = t_0) = v_0$, имеем значение постоянной $c_1 = \frac{1}{v_0} - kt_0$, после подстановки которой в (3.2.2) приходим к решению

$$v = \frac{v_0}{v_0 k(t - t_0) + 1}. \quad (3.2.3)$$

Особой точкой решения (3.2.3) является простой полюс $t^* = t_0 - (kv_0)^{-1}$, положение которого зависит от начальных данных t_0 и v_0 . Следовательно, в данной математической модели мы имеем дело с подвижной особой точкой.

Предполагая в (3.2.1), что сила сопротивления линейно зависит от скорости, имеем уравнение

$$v_t = -kv, \quad (3.2.4)$$

решение которого с учетом начального условия запишется в виде

$$v = v_0 e^{-k(t-t_0)}. \quad (3.2.5)$$

Очевидно, что в этом решении особых точек нет.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Уравнение

$$n y_z y^{n-1} = 1 \quad (3.2.6)$$

имеет решение

$$y(z) = (z - c_2)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.2.7)$$

где c_2 — произвольная постоянная. При $n = 1$ решение (3.2.7) не имеет особой точки, но в случае $n \neq 1$ оно имеет критическую подвижную алгебраическую точку при $z = c_2$. Если в уравнении (3.2.6) сделать замену $z - c = t^n$, то оно перейдет в уравнение, имеющее решение с некритическим подвижным полюсом первого порядка. Таким образом, в ряде случаев с помощью замены переменных в исходном дифференциальном уравнении можно прийти к уравнениям, решения которых не имеют критических подвижных особых точек.

Пример 2. Уравнение

$$y_{zz} + y_z^2 = 0 \quad (3.2.8)$$

имеет общее решение в виде

$$y(z) = \ln(z - c_1) + c_2, \quad (3.2.9)$$

с критической точкой при $z = c_1$.

Пример 3. Общее решение уравнения

$$y_{zz}^2 y^2 - 2y y_z^2 y_{zz} + y_z^4 - 4y y_z^3 = 0 \quad (3.2.10)$$

выражается формулой

$$y(z) = c_1 \exp\left(-\frac{1}{z - c_2}\right), \quad (3.2.11)$$

из которой следует, что при $z = c_2$ решение (3.2.11) имеет подвижную существенную особую точку.

Пример 4. Общее решение уравнения

$$(1 + y^2)y_{zz} = y_z^2(2y - 1) \quad (3.2.12)$$

имеет вид [18]

$$y = \operatorname{tg}(\ln(c_1 z + c_2)), \quad (3.2.13)$$

для которого точка $z = -c_1/c_2$ является критической особой точкой.

Пример 5. Уравнение

$$2zyy_z = 1, \quad (3.2.14)$$

имеет решение в виде:

$$y = \sqrt{\ln \frac{z}{c_1}}, \quad (3.2.15)$$

из которого видно, что оно имеет три особые точки $z = 0$, $z = \infty$ и $z = c_1$. При этом первые две не зависят от начальных данных (являются неподвижными) и определяются из вида самого дифференциального уравнения, а точка $z = c_1$ есть критическая подвижная особая точка.

Приведенные примеры показывают, что особые точки решений дифференциальных уравнений могут зависеть от начальных условий, причем они могут быть как критическими, так и не критическими.

3.3. Уравнения, не имеющие решений, с критическими подвижными особыми точками

Положение неподвижных особых точек решений дифференциальных уравнений непосредственно определяется по виду уравнения, но определение поведения подвижных особых точек является, как правило, трудной задачей.

При анализе нелинейных дифференциальных уравнений, прежде всего, возникает вопрос о нахождении уравнений, решения которых не имеют критических подвижных точек, поскольку в этом случае возможна униформизация решений и, следовательно, решения таких дифференциальных уравнений являются однозначными функциями комплексной переменной z [2, 18, 39].

Вначале сформулируем теорему Коши, которую примем без доказательства.

Теорема 3.1. *Если правая часть уравнения*

$$y_z = F(y, z) \quad (3.3.1)$$

является аналитической функцией в окрестности точек y_0 и z_0 , то решение дифференциального уравнения (3.3.1), удовлетворяющее начальному условию $y(z = z_0) = y_0$, является также аналитической функцией в окрестности точки z_0 .

Утверждение, аналогичное теореме 3.1, справедливо для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Эта теорема используется при доказательстве следующей важной теоремы, которую приведем также без доказательства.

Теорема 3.2. *Решения линейных уравнений не имеют критических подвижных особых точек.*

Таким образом, решения линейных уравнений вообще не имеют подвижных особых точек. Это свойство принадлежит не только линейным уравнениям. Можно привести примеры нелинейных дифференциальных уравнений, решения которых не имеют подвижных особых точек. Например, из теории эллиптических функций известно, что нелинейное уравнение третьего порядка, которое получено путем исключения \wp из системы уравнений

$$\begin{aligned} \wp &= \frac{\sigma_z^2 - \sigma \sigma_{zz}}{\sigma^2}, \\ \wp_z^2 &= 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

имеет решение лишь с неподвижной особой точкой $z = \infty$.

Решениями нелинейных ОДУ в отличие от линейных могут иметь как неподвижные, так и подвижные особые точки.

Применительно к уравнениям первого порядка Пенлеве доказал замечательную теорему.

Теорема 3.3. *Уравнения первого порядка, алгебраические относительно неизвестной функции и ее производной, не имеют трансцендентных и существенно особых точек в решениях.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [18].

Решения нелинейных дифференциальных уравнений, приведенных в п. 3.3, имеют трансцендентные и существенно особые подвижные точки. Однако это были примеры уравнений второго порядка. Можно предложить примеры и уравнений первого порядка, имеющих решения подобного типа. Например, общее решение уравнения [18]

$$y_z = e^{-y} \quad (3.3.3)$$

выражается формулой

$$y = \ln(z - c_1), \quad (3.3.4)$$

из которой видно, что при $z = c_1$ решение имеет критическую подвижную трансцендентную особую точку. Однако правая часть уравнения (3.3.3) не является алгебраической функцией относительно переменной y .

Остановимся на уравнениях первого порядка с решениями, не имеющими критических подвижных особых точек. Рассмотрим уравнение вида:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(w, z)}{Q(w, z)}, \quad (3.3.5)$$

где P и Q — многочлены относительно переменной w .

Решения уравнений (3.3.5) в силу теоремы Пенлеве могут иметь только подвижные алгебраические особые точки, и поэтому задача сводится к нахождению уравнений, решения которых не имеют критических подвижных алгебраических точек и критических подвижных полюсов.

Полагая, что Q содержит w , получаем, что решение уравнения (3.3.5) имеет подвижную алгебраическую точку w_0 , поскольку, взяв z_0 так, чтобы $Q(w, z_0) = 0$, $P(w, z_0) \neq 0$, можно найти w_0 из уравнения $Q(w_0, z_0) = 0$.

Если Q не зависит от w , то уравнение (3.3.5) можно представить в виде

$$\frac{dw}{dz} = a_0(z) w^n + a_1(z) w^{n-1} + \dots + a_n(z). \quad (3.3.6)$$

Решения этого уравнения не имеют критических подвижных алгебраических точек. Однако оно может иметь решения с критическими подвижными полюсами. Найдем условия, при которых уравнение (3.3.6) не имеет таких решений.

Сделав в (3.3.6) замену $w = w_1^{-1}$, получаем уравнение

$$\frac{dw_1}{dz} = -(a_0(z) + a_1(z)w + \dots + a_n(z)w_1^n)w_1^{2-n}, \quad (3.3.7)$$

из которого следует, что w_1 при $n > 2$ входит в знаменатель, и поэтому решение (3.3.7) имеет критические подвижные алгебраические точки, в которых $w_1 = 0$. Следовательно, для отсутствия критических полюсов в решении уравнения (3.3.7) требуется, чтобы $n \leq 2$. Мы приходим к теореме, доказанной Л. Фуксом в 1884 году.

Теорема 3.4. Среди всех уравнений первого порядка вида (3.3.5) только уравнение Риккати

$$w_z = a_0(z)w^2 + a_1(z)w + a_2(z) \quad (3.3.8)$$

не имеет решений с подвижными критическими точками.

Доказательство. При $a_0(z) = 0$ уравнение (3.3.8) становится линейным. В случае $a_0(z) \neq 0$ решение уравнения (3.3.8) имеет подвижные полюса первого порядка.

Уравнение (3.3.8) можно упростить. Введем новую функцию $W(z)$ по формуле

$$w = \varphi(z)W + \Psi(z)$$

тогда из (3.3.8) при

$$\varphi = -\frac{1}{a_0(z)}, \quad \Psi = -\frac{a_{0,z} + a_1a_0}{2a_0^2} \quad (3.3.9)$$

имеем уравнение Риккати в виде

$$W_z = -W^2 - q(z), \quad (3.3.10)$$

где

$$q(z) = -a_0\Psi_z + a_0^2\Psi^2 + a_0a_1\Psi + a_0a_2. \quad (3.3.11)$$

Уравнение (3.3.10) заменой

$$W = \frac{\omega_z}{\omega}$$

может быть приведено к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\omega_{zz} + q(z)\omega = 0. \quad (3.3.12)$$

Поскольку $q(z)$ выражается через коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 уравнения (3.3.8), то особые точки уравнения $\omega(z)$ определяются неподвижными особыми точками функций a_0 , a_1 и a_2 .

В 1884 году Л. Фукс и А. Пуанкаре предложили искать нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых, во-первых, не имеют критических подвижных особых точек и, следовательно, являются однозначными функциями и, во-вторых, не выражаются через ранее известные функции. Фактически Фукс и Пуанкаре сформулировали проблему нахождения новых функций, определяемых решениями нелинейных дифференциальных уравнений. Они рассмотрели нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с решениями, не имеющими критических подвижных особых точек, но среди решений таких уравнений не нашли новых функций. Действительно, среди всех нелинейных уравнений вида

$$y_z = F(y, z), \quad (3.3.13)$$

где F — рациональная функция от y и аналитическая по z , есть лишь одно уравнение Риккати (3.3.8) с решениями, не имеющими критических подвижных особых точек. Однако это уравнение преобразуется к линейному уравнению (3.3.12) и, следовательно, не приводит к новым функциям.

Когда степень производной в дифференциальном уравнении больше единицы, то как было показано в работах Брио и Буке, в решениях уравнений первого порядка появляется эллиптическая функция Вейерштрасса [39].

3.4. Определение свойства Пенлеве и уравнения Пенлеве

При изучении задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки С.В. Ковалевская искала решение, в котором отсутствуют критические подвижные точки. Это обстоятельство позволили ей построить решения в аналитическом виде. Открытие этого факта вдохновило многих исследователей на изучение нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В 1887 году Пикар предложил исследовать класс уравнений второго порядка

$$y_{zz} = R(y_z, y, z), \quad (3.4.1)$$

где R — рациональная функция от y_z и y — аналитическая функция от z , и найти среди (3.4.1) уравнения с решениями, не имеющими критических подвижных особых точек.

Реализация этой идеи принадлежит П. Пенлеве и его ученикам [2, 18, 39]. Пенлеве по существу решал две задачи. Первая задача заключалась в нахождении всех канонических уравнений второго порядка вида (3.4.1) с решениями, не имеющими критических подвижных особых точек. Вторая задача состояла в том, чтобы среди полученных уравнений найти такие, решения которых определяют новые, ранее не изученные функции.

Для решения этих задач Пенлеве разработал принципиально новый метод, существенно отличающийся от методов Фукса и Ковалевской, позволяющий находить необходимые условия отсутствия критических подвижных особых точек в решениях уравнений.

В результате многолетних исследований школе Пенлеве удалось найти 50 канонических уравнений вида (3.4.1) с решениями, не имеющими критических подвижных особых точек. При этом решения 44-х уравнений из этих 50-ти выражались через известные функции (элементарные и эллиптические), а решения шести уравнений определяли новые специальные функции, которые теперь называются *трансцендентами Пенлеве*.

Определение 3.9. Уравнения, решения которых определяют трансценденты Пенлеве, называются *уравнениями Пенлеве*.

Они имеют вид [1, 2, 18, 39]:

$$(P_1) \quad y_{zz} = 6y^2 + z, \quad (3.4.2)$$

$$(P_2) \quad y_{zz} = 2y^3 + zy + \alpha, \quad (3.4.3)$$

$$(P_3) \quad y_{zz} = \frac{y_z^2}{y} - \frac{yz}{z} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{z} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}, \quad (3.4.4)$$

$$(P_4) \quad y_{zz} = \frac{y_z^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(z^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}, \quad (3.4.5)$$

$$(P_5) \quad y_{zz} = \left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right] y_z^2 - \frac{yz}{z} + \frac{(y-1)^2}{z^2} \left[\alpha y + \frac{\beta}{y} \right] + \gamma \frac{y}{z} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1}, \quad (3.4.6)$$

$$\begin{aligned}
(P_6) \quad y_{zz} = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-z} \right] y_z^2 - \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{y-z} \right] y_z + \\
& + \frac{y(y-1)(y-z)}{z^2(z-1)^2} \left[\alpha + \beta \frac{z}{y^2} + \gamma \frac{z-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{z(z-1)}{(y-z)^2} \right].
\end{aligned}
\tag{3.4.7}$$

Пять уравнений Пенлеве зависят от комплексных параметров α , β , γ и δ , при этом третье уравнение Пенлеве (P_3) зависит лишь от двух произвольных комплексных параметров α и β , поскольку для γ и δ есть ограничение: $\gamma(\gamma-1)=0$ и $\delta(\delta-1)=0$. Для пятого уравнения Пенлеве (P_5) имеется аналогичное ограничение: $\delta(\delta-1)=0$.

В действительности, самому Пенлеве принадлежит открытие лишь трех первых уравнений (P_1 , P_2 , P_3), а остальные три уравнения (P_4 , P_5 , P_6) нашел его ученик Гамбье [2, 18].

Если допустить, что зависимость R от y в (3.4.1) является алгебраической, то список уравнений с решениями, не имеющими критических подвижных особых точек, расширяется до 53-х, но количество уравнений, определяющих новые функции, при этом не увеличивается. Список этих 53-х уравнений второго порядка можно найти в книге [2].

Из работ Пенлеве и его учеников по классификации уравнений второго порядка (3.4.1) следует, что отсутствие критических подвижных точек в решениях уравнений является признаком существования решений. При этом оказалось, что решения уравнений Пенлеве (3.4.2) — (3.4.7) не являются классическими функциями в общепринятом смысле, поскольку, как мы увидим ниже, они являются существенно трансцендентными функциями относительно постоянных интегрирования.

Из сказанного следует, что отсутствие критических подвижных особых точек является очень важным свойством дифференциального уравнения. Дадим определение.

Определение 3.10. Будем говорить, что обыкновенное дифференциальное уравнение обладает свойством Пенлеве, если общее решение этого уравнения не имеет критических подвижных особых точек.

Определение 3.11. Дифференциальные уравнения, имеющие свойство Пенлеве, называются уравнениями типа Пенлеве.

Одной из главных задач аналитической теории дифференциальных уравнений является анализ исходного дифференциального уравнения на свойство Пенлеве. Если исследуемое дифференциальное уравнение имеет свойство Пенлеве, то можно надеяться найти решение этого дифференциального уравнения [1, 18, 39]. Если такого свойства нет, то проводимый анализ может подсказать замену (как мы увидим далее), с помощью которой уравнение может быть приведено к уравнению, имеющему свойство Пенлеве. Но если свойства Пенлеве нет, и соответствующая замена, с помощью которой исходное дифференциальное уравнение приводится к уравнению типа Пенлеве, не находится, то решение исходного дифференциального уравнения в аналитическом виде едва ли может быть найдено.

3.5. Алгоритм Ковалевской анализа дифференциальных уравнений

При исследовании задачи о волчке Ковалевская искала решение, не только не имеющее критических подвижных особых точек, но предполагала, что решения исходной задачи имеют простые полюса.

Рассмотрим алгоритм, использованный Ковалевской, на примере исследования одного дифференциального уравнения. Пусть имеем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$w_n = F(w, w_1, \dots, w_{n-1}, z). \quad (3.5.1)$$

Здесь введены обозначения

$$w_1 \equiv \frac{dw}{dz}, \dots, \quad w_{n-1} \equiv \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}, \quad w_n \equiv \frac{d^n w}{dz^n}.$$

Пусть z_0 — произвольная особая точка решения дифференциального уравнения (3.5.1). Следуя Ковалевской, предположим, что решение уравнения (3.5.1) имеет лишь полюса, поэтому его можно представить вблизи z_0 посредством ряда Лорана [2, 18, 39]

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j-p}. \quad (3.5.2)$$

Естественно, что гипотеза о представлении решения уравнения (3.5.1) в виде (3.5.2) требует обоснования, которое заключается в том, что разложение (3.5.2) будет иметь место, если в нем найдется n произвольных постоянных (констант интегрирования) уравнения (3.5.1). Поскольку одной из постоянных служит z_0 , то остальные $n - 1$ констант должны входить в коэффициенты a_j . Если число этих постоянных в решении (3.5.2) будет меньше, чем порядок уравнения, то предположение о существовании решения в виде (3.5.2) не верно, и решение исходного уравнения содержит не только полюсы.

Алгоритм Ковалевской был улучшен в работе М. Абловица, А. Рамани и Х. Сигура [78, 79]. Они предложили следующую процедуру.

Первый шаг. Определение наименьшей степени в (3.5.2). С этой целью в ведущие члены исходного уравнения (3.5.1) подставляется выражение

$$w = \frac{a_0}{\xi^p}, \quad \xi = z - z_0. \quad (3.5.3)$$

Определение 3.12. Ведущими членами в уравнении (3.5.1) является w_n и одно слагаемое (или несколько слагаемых) в правой части (3.5.1), которые дают наименьшую степень ξ .

Например, в уравнении второго порядка

$$w_{zz} = w^2 + A w + B \quad (3.5.4)$$

ведущими членами являются w_{zz} и w^2 .

Подставляя (3.5.3) в ведущие члены уравнения (3.5.1) и приравнявая выражения при наименьших степенях ξ , можно определить пары значений (p, a_0) . Их может быть несколько. В этом случае они соответствуют различным семействам решений уравнения (3.5.1). Например, подставляя (3.5.3) в ведущие члены уравнения (3.5.4), находим, что

$$\frac{p(p+1)a_0}{\xi^{p+2}} = \frac{a_0^2}{\xi^{2p}}$$

откуда $p = 2, a_0 = 2$, и мы имеем лишь одно семейство решений.

Для того чтобы решение уравнения (3.5.1) не имело критических подвижных алгебраических особых точек, значение p на этом шаге должно быть целым. В случае дробного или мнимого p исходное уравнение не имеет свойства Пенлеве. Однако значение p может подсказать замену в исходном дифференциальном уравнении, с помощью которой можно перейти к уравнению типа Пенлеве.

Например, если подставить (3.5.3) в дифференциальное уравнение

$$w_z = -\frac{1}{2}w^3 + Ay, \quad (3.5.5)$$

то получим, что $(p, a_0) = (\frac{1}{2}, \pm 1)$, откуда следует, что уравнение (3.5.5) не имеет свойства Пенлеве. Однако, сделав замену $w = 1/\sqrt{v}$ в уравнении (3.5.5), получаем линейное уравнение

$$v_z = 1 - 2Av, \quad (3.5.6)$$

имеющее свойство Пенлеве.

Если все полученные на первом шаге значения p целые, то анализ дифференциального уравнения может быть продолжен.

Второй шаг. Определение индексов Фукса для каждой пары значений (p, a_0) .

Определение 3.13. Индексами Фукса называются номера j_r ($r = 1, \dots, n-1$) коэффициентов a_j в разложении решения (3.5.2), при которых коэффициенты a_j не определяются.

Индексы Фукса (иногда называемые резонансами) определяются при подстановке выражения

$$w = \frac{a_0}{\xi^p} + \beta \xi^{r-p}, \quad \xi = z - z_0, \quad (3.5.7)$$

в ведущие члены уравнения (3.5.1).

Здесь β один из коэффициентов разложения (3.5.2), который не определяется в результате подстановки (3.5.2) в исходное уравнение (3.5.1). Подставив (3.5.7) в ведущие члены уравнения (3.5.1) и приравняв выражения с первой степенью β нулю, получим соотношение

$$Q(r) \beta \cdot \xi^q = 0, \quad q \geq -p + r - n, \quad (3.5.8)$$

где $Q(r)$ — многочлен.

Корни уравнения

$$Q(r) = 0, \quad (3.5.9)$$

соответствующие $\beta \neq 0$, определяют индексы Фукса.

При решении уравнения (3.5.9) следует иметь в виду, что один из индексов Фукса всегда равен -1 . Это значение соответствует произвольности выбора z_0 . Любые корни при $\operatorname{Re} r > 0$, не равные вещественному целому числу, указывают на критические подвижные особые точки вблизи $z = z_0$. В этом случае необходимости в проведении дальнейшего анализа нет, поскольку уравнение не имеет свойства Пенлеве.

Многочлен $Q(r)$ должен иметь $n - 1$ неотрицательных целых корней, поскольку общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка при разложении вблизи подвижного полюса должно иметь n произвольных постоянных. В случае, если хотя бы для одной пары (p, a_0) положительных целых корней меньше $n - 1$, локального общего решения вида (3.5.2) уравнения (3.5.1) нет, и для анализа дифференциального уравнения на свойство Пенлеве следует проводить дополнительное исследование.

Корни уравнения (3.5.9) для индексов Фукса, таких, что $\operatorname{Re} r < 0$ (кроме -1), указывают на то, что решение уравнения (3.5.1) в виде (3.5.2) непредставимо, и описываемый метод для анализа данной ветви решения не применим. Для ответа на вопрос о свойстве Пенлеве уравнения (3.5.1) в этом случае также требуется дополнительное исследование.

Если все корни уравнения (3.5.9), кроме -1 (и возможно 0), положительные и целые числа для каждой пары значений (p, a_0) , то в решении уравнения (3.5.1) критических подвижных алгебраических особых точек нет, но возможны критические подвижные особые точки логарифмического типа.

Третий шаг. Определение постоянных интегрирования в решении дифференциального уравнения (3.5.1).

Предположим, что $r_i (i = 1, \dots, s; r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_s)$ — положительные целые корни уравнения (3.5.9) для каждой пары (p, a_0) , где $s \leq n - 1$.

Подставляя

$$w = \sum_{j=0}^{r_s} a_j \xi^{j-p}, \quad \xi = z - z_0, \quad s = 1, \dots, n - 1, \quad (3.5.10)$$

в дифференциальное уравнение (3.5.1) и приравнявая последовательно выражения при одинаковых степенях ξ нулю, получаем соотношение при $j = 1, 2, \dots, r_s$

$$Q(j) a_j = R_j(z_0, a, a_1, \dots, a_{j-1}), \quad (3.5.11)$$

из которых рекуррентным способом последовательно находятся a_j . Однако $Q(r_1) = 0$ при $j = r_1$ в силу (3.5.9), и коэффициент a_{r_1} не определяется. Коэффициент a_{r_1} в этом случае можно выбрать произвольным, если

$$R_{r_1}(z_0, a, a_1, \dots, a_{r_1-1}) = 0. \quad (3.5.12)$$

Если

$$R_{r_1}(z_0, a_0, a_1, \dots, a_{r_1-1}) \neq 0,$$

то соотношение (3.5.11) не выполняется, и гипотеза о разложении решения уравнения (3.5.1) в ряд Лорана (3.5.2) не верна.

Решение $w(z)$ при этом следует искать в виде

$$w = \sum_{j=0}^{r_1-1} a_j (z - z_0)^{j-p} + [a_{r_1} + b_{r_1} \ln(z - z_0)] (z - z_0)^{r_1-p} + \dots \quad (3.5.13)$$

так, чтобы выражение $Q(r_1)b_{r_1}$ стало равным нулю. Из этого условия определяется коэффициент b_{r_1} при произвольном выборе a_{r_1} . Однако, продолжая вычислять коэффициенты разложения, будем вынуждены вводить логарифмические члены. В результате получим асимптотическое решение уравнения (3.5.1), не обладающее свойством Пенлеве.

Если соотношение (3.5.12) выполняется, то коэффициент a_{r_1} можно выбрать произвольным. В этом случае, используя формулу (3.5.10), следует перейти к вычислению коэффициентов a_j при $r_1 < j \leq r_2$ и к исследованию коэффициента a_{r_2} при следующем значении индекса Фукса. Если коэффициент a_{r_2} можно выбрать произвольным, то можно переходить к определению коэффициентов в следующем интервале индексов Фукса и т.д. При этом следует иметь в виду, что если при исследовании коэффициентов с любым индексом Фукса возникают логарифмические выражения, то исследуемое дифференциальное уравнение (3.5.1) не имеет свойства Пенлеве.

Если число произвольных коэффициентов a_{r_s} в разложении (3.5.2) равно $n - 1$, то дифференциальное уравнение (3.5.1) проходит тест на свойство Пенлеве.

Основные этапы исследования системы дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве незначительно отличаются от описанного алгоритма, относящегося к одному уравнению.

На первом шаге, как и в случае одного дифференциального уравнения, предполагается, что решение системы имеет вид

$$w_i = a_0^{(i)} \xi^{-p_i}, \quad \xi = z - z_0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.5.14)$$

где n — порядок системы уравнений. Подстановка (3.5.14) в систему уравнений позволяет найти пары $(p_i, a_0^{(i)})$. При этом, если найденные p_i не целые, то, как и в случае одного уравнения, исследуемая система уравнений не принадлежит к типу Пенлеве.

На втором шаге в систему дифференциальных уравнений подставляются выражения

$$w_i = a_0^{(i)} \xi^{-p_i} + \beta^{(i)} \xi^{r-p_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.5.15)$$

которые приводят к системе алгебраических уравнений для определения индексов Фукса. В результате приравнивания выражений, линейных по $\beta^{(i)}$ нулю, получаем

$$[Q(r)] \beta = 0, \quad (3.5.16)$$

где $[Q(r)]$ — матрица $n \times n$ и β — столбец, составленный из компонент $\beta^{(i)}$. Индексы Фукса находятся из равенства нулю определителя матрицы $[Q(r)]$

$$\det [Q(r)] = 0. \quad (3.5.17)$$

При этом вследствие произвольности выбора z_0 один из корней уравнения (3.5.17) опять же равен -1 .

На третьем шаге исследования определяются постоянные интегрирования в разложении решения системы уравнений в ряд Лорана. Предполагается, что

$$w_i = \sum_{k=1}^{r_s^{(i)}} a_k^{(i)} (z - z_0)^{k-p_i} \quad (i = 1, \dots, n; \quad s = 1, \dots, n-1), \quad (3.5.18)$$

где $r_s^{(i)}$ — индексы Фукса. Для того чтобы исследуемая система уравнений проходила тест на свойство Пенлеве, все коэффициенты $a_{r_s}^{(i)}$ должны быть произвольными.

3.6. Локальные представления решений уравнений типа Пенлеве

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие применение метода Ковалевской для анализа нелинейных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Уравнение Риккати

$$w_z = -w^2 + w(z). \quad (3.6.1)$$

Полагая

$$w = \frac{a_0}{\xi^p}, \quad \xi = z - z_0, \quad (3.6.2)$$

и подставляя в первый и второй члены уравнения, имеем $(p, a_0) = (1, 1)$. Поскольку $p = 1$, то первое необходимое условие теста выполняется.

После подстановки формулы

$$w = \xi^{-1} + \beta \cdot \xi^{r-1} \quad (3.6.3)$$

в (3.6.1) и приравнивания выражений при β нулю, находим

$$\beta(r+1)\xi^{r-2} = 0. \quad (3.6.4)$$

Откуда получаем, что индекс Фукса равен -1 . Поскольку уравнение (3.6.1) первого порядка и z_0 выбрано произвольным, то необходимое условие для того, чтобы уравнение (3.6.1) имело свойство Пенлеве, выполняется.

Пример 2. Уравнение ангармонического осциллятора

$$w_{zz} = -3w^2 + C_0w - C_1. \quad (3.6.5)$$

Проверим на свойство Пенлеве уравнение (3.6.5), в котором C_0 и C_1 — произвольные постоянные. Подставив (3.6.2) в первый и второй члены уравнения (3.6.5) и приравняв выражения при одинаковых степенях ξ , имеем: $p = 2$, $a_0 = -2$.

Используя

$$w = -2\xi^{-2} + \beta^{r-2}, \quad \xi = z - z_0,$$

получаем уравнение для индексов Фукса в виде:

$$r^2 - 5r - 6 = 0.$$

Откуда

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 6.$$

Подставляя

$$w = -2\xi^{-2} + a_1\xi^{-1} + a_2 + a_3\xi + a_4\xi^2 + a_5\xi^3 + a_6\xi^4 \quad (3.6.6)$$

в уравнение (3.6.5), последовательно находим коэффициенты разложения решения уравнения (3.6.5) в ряд Лорана. Они имеют вид: $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{C_0}{6}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\left(\frac{12C_1 + C_0^2}{120}\right)$, $a_5 = 0$, a_6 — произвольное число.

Таким образом, разложение решения уравнения (3.6.6) имеет вид:

$$w = -2(z - z_0)^{-2} - \frac{C_0}{6} - \frac{(12C_1 + C_0^2)}{120}(z - z_0)^2 + a_6(z - z_0)^4 + \dots \quad (3.6.7)$$

Уравнение (3.6.5) второго порядка содержит две постоянные z_0 и a_6 , и поэтому оно проходит тест Пенлеве.

Аналогично рассмотренному примеру может быть проверено первое уравнение Пенлеве

$$w_{zz} = 3w^2 + z. \quad (3.6.8)$$

Уравнение (3.6.8) имеет те же индексы Фукса, что и уравнение (3.6.5). Локальное представление общего решения уравнения (3.6.8) принимает вид:

$$w = 2(z - z_0)^{-2} - \frac{z_0}{10}(z - z_0)^2 - \frac{1}{6}(z - z_0)^3 + a_6(z - z_0)^4 + \dots \quad (3.6.9)$$

Пример 3. Уравнение [78]

$$w w_{zz} - 4w_z^2 = 0. \quad (3.6.10)$$

Подставляя (3.6.2) в уравнение (3.6.10), имеем $p = 0$ и $p = -1/3$. Исходное уравнение не имеет свойства Пенлеве. Однако, сделав замену

$$w = v^{-1/3},$$

приходим к линейному уравнению для $v(z)$

$$v_{zz} = 0, \quad (3.6.11)$$

имеющему свойство Пенлеве.

Пример 4. Уравнение [78]

$$w_{zzzz} - 27w_{zz}y^2 - 21w_z y^3 + 9w^5 = 0. \quad (3.6.12)$$

Полагая (3.6.2) в уравнении (3.6.12), имеем $(p, a_0) = (1, 1)$. Используя (3.6.3), получаем уравнение для индексов Фукса

$$(r+1)(r-1)^2(r-9) = 0. \quad (3.6.13)$$

Асимптотическое решение уравнения имеет вид [78]

$$y = (z - z_0)^{-1} + c_1 + c_2 \left\{ 22 \ln(z - z_0) + 27 [\ln(z - z_0)]^2 \right\} + \dots, \quad (3.6.14)$$

где z_0 , c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Уравнение (3.6.12) не относится к уравнениям типа Пенлеве.

Пример 5. Уравнение [1]

$$w_{zz} - 2w^3 - z^m w = 0, \quad (3.6.15)$$

где m — целое и больше нуля. Очевидно, что при $m = 0$ уравнение (3.6.15) имеет свойство Пенлеве, поскольку после умножения на y_z и интегрирования по z имеем

$$w_z^2 = c_1 + w^2 + wy^4, \quad (3.6.16)$$

где c_1 — постоянная интегрирования.

Если ввести новую переменную $\omega = y^2$, то уравнение (3.6.16) можно представить в виде

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega - \alpha)(\omega - \beta)}} = dz, \quad (3.6.17)$$

где α и β — корни квадратного уравнения

$$c_1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

Интеграл (3.6.17) представляет собой эллиптический интеграл первого рода.

При $m = 1$ уравнение (3.6.15) является вторым уравнением Пенлеве.

В уравнении (3.6.15) сделаем замену $z = \xi + z_0$, тогда, используя формулу для бинома Ньютона

$$(\xi + z_0)^m = z_0^m + m\xi z_0^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} \xi^2 z_0^{m-2} + \dots,$$

уравнение (3.6.15) можно представить в виде

$$w_{\xi\xi} - 2w^3 - \left(z_0^m + \xi m z_0^{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) \xi^2 z_0^{m-2} + \dots \right) w = 0. \quad (3.6.18)$$

Подставляя (3.6.2) в ведущие члены уравнения (3.6.18), находим, что уравнение имеет два семейства решений, поскольку $(a_0, p) = (1, 1)$ и $(a_0, p) = (-1, 1)$. Значения p — целые, и тест Ковалевской может быть продолжен.

Подставляя

$$w = \xi^{-1} + \beta \xi^{j-1}$$

в первое и второе слагаемые уравнения (3.6.18), находим уравнение для индексов Фукса в виде

$$j^2 - 3j - 4 = 0,$$

имеющее корни

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 4.$$

Индексы Фукса целые, и поэтому анализ уравнения на свойство Пенлеве следует продолжить.

Подставляя

$$w = \xi^{-1} + a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3 + \dots$$

в уравнение (3.6.18) и приравнявая выражения при одинаковых степенях ξ , последовательно находим:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{6} z_0^m, \quad a_3 = -\frac{m z_0^{m-1}}{4}.$$

Коэффициент a_4 не определяется, так как члены с ξ^4 дают соотношение:

$$5(j-4)a_4 = \frac{1}{2} z_0^{m-2} m(m-1). \quad (3.6.19)$$

Из (3.6.19) следует, что a_4 можно взять произвольным, если $m = 0$ или $m = 1$. При всех других m разложение решения уравнения (3.6.15) в ряд Лорана отсутствует, и (3.6.15) не имеет свойства Пенлеве.

В случае $m = 0$ и $m = 1$ локальное представление решения уравнения (3.6.15) имеет вид:

$$w = (z - z_0)^{-1} - \frac{z_0^m}{6} (z - z_0) - \frac{mz_0^{m-1}}{4} (z - z_0)^2 + a_4 (z - z_0)^3 + \dots, \quad (3.6.20)$$

где $m(m-1) = 0$, z_0 и a_4 — постоянные интегрирования.

Для второго уравнения Пенлеве (3.4.3), отличающегося от (3.6.15) параметром α , локальное представление решения имеет вид:

$$w = (z - z_0)^{-1} - \frac{z_0}{6} (z - z_0) - \frac{(1 + \alpha)}{4} (z - z_0)^2 + \\ + a_4 (z - z_0)^3 - \frac{z_0}{24} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (z - z_0)^4 + \dots \quad (3.6.21)$$

Приведённые примеры показывают, что алгоритм Ковалевской эффективен при исследовании дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве. Однако его можно применять, если исходное уравнение имеет все, кроме -1 , неотрицательные индексы Фукса.

3.7. Трансцендентная зависимость решений первого уравнения Пенлеве

Пенлеве и его ученики показали, что решения уравнений (3.4.2)—(3.4.7) не только не имеют критически подвижных особых точек, но не имеют и существенно особых точек. Кроме того,

оказалось, что решения уравнений Пенлеве являются существенно трансцендентными функциями относительно постоянных интегрирования. Поскольку таких функций в то время не было, то это обстоятельство привело Пенлеве к убеждению, что общие решения этих уравнений определяют новые специальные функции.

Теоремы существования решений утверждают, что в случае неподвижных критических точек решение уравнения второго порядка может быть полностью и единственным образом определено при заданных значениях w_0 и w'_0 в точке $z = z_0$. При этом решение можно рассматривать как функцию от начальных данных w_0 и w'_0 . Для зависимости решения от произвольных постоянных возможны три различных случая.

Во-первых, решение может быть алгебраической или рациональной функцией от w_0 и w'_0 . Например, общее решение уравнения $w_{zz} + 3ww_z + w^3 = 0$ имеет вид

$$w = \frac{c_2 + 2z}{c_1 + c_2 z + z^2} \quad (3.7.1)$$

и является рациональной функцией от постоянных c_1 и c_2 .

Во-вторых, решение уравнения может не являться алгебраической функцией от постоянных, но оно может иметь первый интеграл, в который постоянная интегрирования входит алгебраически. Такой случай соответствует полутрансцендентной зависимости от постоянных интегрирования. Например, уравнение

$$w_{zz} = 3w^2 + Aw + B, \quad (3.7.2)$$

где A и B — коэффициенты, имеет первый интеграл в виде

$$w_z^2 = 2w^3 + Aw^2 + 2Bw + c_1 \quad (3.7.3)$$

и линейно зависит от постоянной интегрирования c_1 .

Третий случай зависимости общего решения от постоянных интегрирования отличается от первого и второго и является примером существенно трансцендентной функции от постоянных интегрирования. Источниками новых трансцендентных функций,

отличных от ранее известных, могут быть решения, относящиеся к этой категории.

На примере первого уравнения Пенлеве

$$w_{zz} + 3w^2 - \frac{z}{2} = 0 \quad (3.7.4)$$

покажем, что общее решение этого уравнения не может быть рациональной, алгебраической или полутрансцендентной функцией относительно постоянных интегрирования [2, 39, 95]. Этот факт сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3.5. *Общее решение первого уравнения Пенлеве является существенно трансцендентной функцией от постоянных интегрирования.*

Доказательство. В начале покажем, что общее решение уравнения (3.7.4) не имеет рациональной или алгебраической зависимости от постоянных интегрирования. Полагая в уравнении (3.7.4)

$$z = \lambda z', \quad w = \lambda^{-2} w', \quad (3.7.5)$$

приведем его к виду

$$w_{zz} + 3w^2 - \frac{\lambda^5 z}{2} = 0 \quad (3.7.6)$$

(штрихи в последнем уравнении опущены). При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (3.7.6) не имеет рациональной зависимости от постоянных интегрирования, поскольку это решение выражается через эллиптическую функцию Якоби. Следовательно, уравнение (3.7.6) при $\lambda \neq 0$ также не имеет рациональной зависимости от постоянных интегрирования. Однако уравнение (3.7.6) при $\lambda = 0$ имеет первый интеграл, и поэтому его решение имеет полутрансцендентную зависимость от начальных условий. Покажем, что в отличие от (3.7.6) при $\lambda = 0$ уравнение (3.7.4) не имеет первого интеграла в виде полинома.

Предположим, что уравнение (3.7.4) имеет первый интеграл

$$P(w, w_z, z) = c_1, \quad (3.7.7)$$

где c_1 — постоянная интегрирования.

В соответствии с определением первого интеграла имеем, что (3.7.7) удовлетворяет уравнению

$$E = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial w} w_1 + \frac{\partial P}{\partial w_1} w_2 = 0, \quad (3.7.8)$$

где w_1 и w_2 — соответственно первая и вторая производные от w по z .

Поскольку (3.7.8) соответствует исходному уравнению (3.7.4), то должно выполняться равенство

$$E = Q \left(w_{zz} + 3w^2 - \frac{z}{2} \right), \quad (3.7.9)$$

где Q зависит от w , w_z и z .

Из сравнения (3.7.8) и (3.7.9) имеем, что

$$\frac{\partial P}{\partial w_1} = Q,$$

и поэтому равенство (3.7.9) можно представить в виде

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial w} w_1 - \left(3w^2 - \frac{z}{2} \right) \frac{\partial P}{\partial w_1} = 0. \quad (3.7.10)$$

Уравнение (3.7.10) можно рассматривать как тождество, которому удовлетворяет первый интеграл (3.7.7). Предположим, что он имеет вид полинома от w , w_1 , и z [2, 39, 95]

$$P = w_1^m + q_1(z, w) w_1^{m-1} + \dots + q_{m-1} w_1 + q_m(w, z), \quad (3.7.11)$$

тогда подставляя (3.7.11) в (3.7.10) и приравнивая выражения при одинаковых степенях w_1 нулю, имеем следующую систему уравнений [39]

$$\frac{\partial q_1}{\partial w} = 0, \quad (3.7.12)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial w} + \frac{\partial q_1}{\partial z} - 3m w^2 + \frac{1}{2}m z = 0, \quad (3.7.13)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial w} + \frac{\partial q_2}{\partial z} - 3(m-1)w^2 q_1 + \frac{1}{2}(m-1)z q_1 = 0, \quad (3.7.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{k+1}}{\partial w} + \frac{\partial q_k}{\partial z} - 3(m-k+1)w^2 q_{k-1} + \\ + \frac{1}{2}(m-k+1)z q_{k-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

$$(k = 3, 4, \dots, m-1),$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial z} - 3w^2 q_{m-1} + \frac{1}{2}z q_{m-1} = 0. \quad (3.7.16)$$

Однако последовательно решая систему уравнений (3.7.12)—(3.7.15) приходим к противоречию, поскольку полученное решение не удовлетворяет уравнению (3.7.16). Противоречие доказывает, что первого интеграла для первого уравнения Пенлеве в форме полинома нет. Таким образом, решение уравнения (3.7.4) является существенно трансцендентной функцией относительно постоянных интегрирования и определяет новую специальную функцию.

Пенлеве был уверен, что открытые им уравнения определяют новые специальные функции. Однако его аргументы были скорее интуитивными, основанными на вере, что если дифференциальное уравнение не имеет первых интегралов в форме полиномов и его общее решение является существенно трансцендентной функцией, то оно должно определять новую функцию. Строгого доказательства того, что новые уравнения определяют новые функции, он не имел. Пенлеве не имел доказательства неприводимости

полученных им уравнений. Под свойством неприводимости нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения понимается, что оно никаким преобразованием не приводится к линейному дифференциальному уравнению или к нелинейному дифференциальному уравнению меньшего порядка. Соответственно, неприводимость уравнений Пенлеве означает, что ни одно из этих уравнений не может быть сведено к линейному уравнению или к нелинейному уравнению первого порядка.

Строгие доказательства свойства неприводимости первого и второго уравнений Пенлеве даны сравнительно недавно в работах Х. Умемуры [39]. Для доказательства неприводимости первого уравнения Пенлеве Умемура ввел понятие классической функции и определил шесть допустимых операций, с помощью которых строятся новые классические функции.

Привлекая для анализа первого уравнения Пенлеве конечномерные дифференциальные группы Галуа, Умемура доказал теорему [39].

Теорема 3.6. *Любое голоморфное решение $w(z)$ первого уравнения Пенлеве — не классическое. Другими словами, общее решение первого уравнения Пенлеве $w(z)$ не выражается через постоянные интегрирования с помощью шести описанных выше допустимых операций для классических функций.*

Умемура также доказал, что отсутствие первых интегралов для уравнений Пенлеве эквивалентно свойству неприводимости этих уравнений. Поэтому доказанная выше теорема о том, что общее решение первого уравнения Пенлеве является существенно трансцендентной функцией, по существу является доказательством неприводимости этого уравнения.

Доказательство неприводимости второго уравнения Пенлеве потребовало выделить возможные рациональные и специальные решения, которые имеет второе уравнение Пенлеве при некоторых фиксированных значениях параметров уравнения. Эти решения могут быть получены с помощью так называемых *преобразований Бэклунда*.

3.8. Преобразования Бэклунда для решений второго уравнения Пенлеве

Решения всех уравнений Пенлеве являются существенно трансцендентными функциями относительно постоянных интегрирования, однако все они, за исключением P_1 , имеют рациональные и специальные решения при некоторых значениях параметров уравнений. Эти решения находятся с помощью преобразований, называемых преобразованиями Бэклунда [39, 95].

Найдем эти преобразования для второго уравнения Пенлеве

$$w_{zz} = 2w^3 + zw + \alpha. \quad (3.8.1)$$

Уравнение (3.8.1) может быть представлено в виде системы двух уравнений

$$p_z - 2pw - \frac{1}{2} - \alpha = 0, \quad (3.8.2)$$

$$w_z + w^2 + \frac{1}{2}z - p = 0. \quad (3.8.3)$$

Это легко проверяется подстановкой p из (3.8.3) в (3.8.2).

Кроме того, уравнение (3.8.1) может быть представлено системой уравнений вида

$$n_z + 2n\tilde{w} - \frac{1}{2} + \tilde{\alpha} = 0, \quad (3.8.4)$$

$$\tilde{w}_z - \tilde{w}^2 - \frac{1}{2}z + n = 0, \quad (3.8.5)$$

что доказывается подстановкой n из (3.8.5) в (3.8.4).

С другой стороны, подставляя w из (3.8.2) в (3.8.3), имеем уравнение для $p(z)$

$$\frac{p_{zz}}{p} - \frac{p_z^2}{4p^2} + \frac{(1 + 2\alpha)^2}{8p^2} + z = 2p \quad (3.8.6)$$

и уравнение для $n(z)$

$$\frac{n_{zz}}{n} - \frac{n_z^2}{4n^2} + \frac{(1 - 2\tilde{\alpha})^2}{8n^2} + z = 2n, \quad (3.8.7)$$

которое получается путем подстановки \tilde{w} из (3.8.4) в (3.8.5).

Из сравнения уравнений (3.8.6) и (3.8.7) следует, что они совпадают в двух случаях: 1) $p = n$ и $\alpha = -\tilde{\alpha}$ и 2) $p = n$ и $\tilde{\alpha} = \alpha + 1$.

При этом из (3.8.2) и (3.8.4) получаем две формулы

$$w = \frac{p_z}{2p} - \frac{1 + 2\alpha}{4p} \quad (3.8.8)$$

и

$$\tilde{w} = -\frac{n_z}{2n} + \frac{1 - 2\tilde{\alpha}}{4n}. \quad (3.8.9)$$

Первый случай соответствует очевидной симметрии второго уравнения Пенлеве

$$\tilde{w}(z, \tilde{\alpha}) = -w(z, -\alpha). \quad (3.8.10)$$

Для второго случая из (3.8.8) и (3.8.9) находим соотношение

$$w(z, \alpha) + \frac{1 + 2\alpha}{4p} = -\tilde{w}(z, \tilde{\alpha}) + \frac{1 - 2\tilde{\alpha}}{4n}. \quad (3.8.11)$$

Откуда с учетом (3.8.3) и (3.8.5) приходим к соотношению между решениями $w(z, \alpha + 1)$, $w(z, \alpha)$, $w(z, \alpha - 1)$ второго уравнения Пенлеве [39, 95]:

$$w(z, \alpha + 1) = -w(z, \alpha) - \frac{1 + 2\alpha}{2y_z + 2w^2 + z}, \quad \alpha \neq -\frac{1}{2}, \quad (3.8.12)$$

$$w(z, \alpha - 1) = -w(z, \alpha) - \frac{1 - 2\alpha}{2w_z - 2w^2 - z}, \quad \alpha \neq \frac{1}{2}. \quad (3.8.13)$$

Эти преобразования для решений второго уравнения Пенлеве носят название *преобразований Бэклунда*. Они позволяют находить некоторые рациональные (в виде отношения многочленов от z) и специальные решения второго уравнения Пенлеве.

3.9. Рациональные и специальные решения второго уравнения Пенлеве

С помощью полученных преобразований Бэклунда найдем рациональные и специальные решения уравнения (3.8.1).

Используя (3.8.12), вначале найдем несколько рациональных решений уравнения (3.8.1). Очевидно, что $w = 0$ при $\alpha = 0$. Тогда из (3.8.12) имеем

$$\begin{aligned} w(z, 1) &= -\frac{1}{z}, & w(z, 2) &= -\frac{2(z^3 - 2)}{z(z^3 + 4)}, \\ w(z, 3) &= -\frac{3(z^6 + 8z^3 + 160)z^2}{(z^3 + 4)(z^6 + 20z^3 - 80)}, \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

$$w(z, 4) = -\frac{4(z^{15} + 50z^{12} + 1000z^9 - 22400z^6 - 112000z^3 - 224000)}{z(z^6 + 20z^3 - 80)(z^9 + 60z^6 + 11200)}.$$

Таким образом, при целых положительных значениях α существуют рациональные решения второго уравнения Пенлеве. Решения при отрицательных целых значениях α можно найти из (3.9.1), принимая во внимание симметрию решений (3.8.10) второго уравнения Пенлеве.

Используя преобразования (3.8.12) и (3.8.13), можно найти также специальные решения второго уравнения Пенлеве.

Подставляя (3.8.4) в (3.8.5), имеем соотношение

$$\tilde{w}_{zz} - 2\tilde{w}^3 - z\tilde{w} - \tilde{\alpha} = \left(\frac{d}{dz} + 2\tilde{w}\right) \left(\tilde{w}_z - \tilde{w}^2 - \frac{1}{2}z\right) + \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}, \quad (3.9.2)$$

из которого следует, что решение уравнения Риккати

$$\tilde{w}_z - \tilde{w}^2 - \frac{1}{2}z = 0 \quad (3.9.3)$$

является так же решением второго уравнения Пенлеве при $\tilde{\alpha} = 1/2$.

Заменой

$$\tilde{y} = -\frac{\omega_z}{\omega} \quad (3.9.4)$$

(3.9.3) приводится к линейному уравнению

$$\omega_{zz} + \frac{1}{2}z\omega = 0, \quad (3.9.5)$$

решения которого выражаются через функцию Эйри.

Таким образом, имеем специальные решения

$$w\left(z, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\omega_z}{\omega},$$
$$w\left(z, \frac{3}{2}\right) = \frac{2\omega_z^3 + z\omega_z\omega_z^2 - \omega^3}{\omega(2\omega_z^2 + z\omega^2)}, \quad (3.9.6)$$

$$w\left(z, \frac{5}{2}\right) = \frac{\omega(6\omega_z^3\omega + z^3\omega^4 + 3z\omega^3\omega_z + 4z^2\omega^2\omega_z^2 + 4z\omega_z^4 - \omega^4)}{(z\omega^2 + 2\omega z^2)(2z\omega_z\omega^2 - \omega^3 + 4\omega_z^3)}$$

при полуцелых значениях α , где ω — решение уравнения для функций Эйри (3.9.5). Решения для отрицательных полуцелых значений α находятся из (3.9.6) с учетом симметрии уравнения.

Аналогичные типы решений получены и для остальных уравнений Пенлеве [39, 95]. Однако для первого уравнения Пенлеве рациональных и специальных решений, выраженных через классические трансцендентные функции, нет.

3.10. Дискретные уравнения Пенлеве

Уравнения Пенлеве можно рассматривать как нелинейные аналоги уравнений, определяющих специальные функции. Из курса математической физики известно, что для большинства

специальных функций имеются рекурсивные формулы связывающие решения специальных функций при различных параметрах уравнений. Например, для функции Бесселя $J_\nu(x)$, полиномов Лежандра $P_n(x)$, и полиномов Чебышева $H_n(x)$ справедливы следующие соотношения [4]:

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = J_\nu(x), \quad (3.10.1)$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) + (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (3.10.2)$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \quad (3.10.3)$$

В последние годы проявляется интерес к дискретным уравнениям Пенлеве, которые по существу являются функциональными соотношениями для решений уравнений Пенлеве. Дискретные уравнения Пенлеве можно представить в виде [39]:

$$x_{n+1} = \frac{P_1(x_n, n) + x_{n-1}P_2(x_n, n)}{P_3(x_n, n) + x_{n-1}P_4(x_n, n)}, \quad (3.10.4)$$

где $P_j(x_n, n)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) — многочлены от x_n степени не выше четырех. Дискретные уравнения Пенлеве встречаются в физических приложениях, например в теории двумерной квантовой гравитации [93], и обладают замечательными свойствами, как и обычные уравнения Пенлеве. У них имеются преобразования Бэклунда, частные решения, выраженные через полиномы, специальные функции и многие другие свойства, которые типичны для уравнений Пенлеве.

Имеется несколько подходов для получения дискретных аналогов уравнений Пенлеве [39, 93]. Ряд дискретных уравнений Пенлеве могут быть получены исходя из соответствующих преобразований Бэклунда. Алгоритм получения дискретных уравнений

Пенлеве из преобразований Бэклунда достаточно прост. Преобразования Бэклунда, как правило, состоят из двух или более соотношений, связывающих два решения при различных значениях параметров уравнения и производные от зависимых переменных. Исключение производных из двух соотношений приводит к рекуррентным соотношениям для трёх различных решений соответствующего уравнения Пенлеве. Полученная алгебраическая зависимость по существу соответствует нелинейному принципу суперпозиции для решений уравнений Пенлеве, которое может рассматриваться как дискретное уравнение Пенлеве. Проиллюстрируем этот подход на примере вывода дискретного уравнения Пенлеве исходя из преобразований Бэклунда для решений второго уравнения Пенлеве.

Преобразования Бэклунда для решений второго уравнения Пенлеве имеют вид:

$$w(z, \alpha + 1) = -w(z, \alpha) - \frac{1 + 2\alpha}{2w^2(z, \alpha) + 2w_z(z, \alpha) + z}, \quad \alpha \neq -\frac{1}{2},$$

$$w(z, \alpha - 1) = -w(z, \alpha) + \frac{1 - 2\alpha}{2w^2(z, \alpha) - 2w_z(z, \alpha) + z}, \quad \alpha \neq \frac{1}{2}.$$

Исключив производную w_z из этих преобразований, получим:

$$\frac{1 + 2\alpha}{w(z, \alpha + 1) + w(z, \alpha)} + \frac{2\alpha - 1}{w(z, \alpha) + w(z, \alpha - 1)} +$$

$$+ 4w^2(z, \alpha) + 2z = 0, \quad \alpha \neq \frac{1}{2}, \alpha \neq -\frac{1}{2}.$$

Пусть

$$\alpha_n = n + k + \frac{1}{2}, \quad y(z, \alpha_n) = x_n, \quad (3.10.6)$$

где k — произвольная постоянная, тогда из (3.10.5) имеем разностное уравнение относительно x_n

$$\frac{n+k}{x_{n+1}+x_n} + \frac{n-1+k}{x_n+x_{n-1}} + 2x_n^2 + z = 0, \quad (3.10.7)$$

где z — параметр. Уравнение (3.10.7) известно как альтернативная форма первого дискретного уравнения Пенлеве (dP_1). Решения второго уравнения Пенлеве удовлетворяют разностному уравнению (3.10.7). Полагая $x_0 = 0$, $x_1 = -1/z$, при $k = 1/2$ из (3.10.7) находим семейство рациональных решений второго уравнения Пенлеве, которое получено выше. В случае $k = 1$, $x_{-1} = \omega_z/\omega$, $x_0 = -\omega_z/\omega$, где $\omega(z)$ — решение уравнения Эйри, из (3.10.7) находится семейство специальных решений второго уравнения Пенлеве.

В непрерывном пределе дискретные уравнения Пенлеве переходят в уравнения Пенлеве. Однако некоторые дискретные уравнения Пенлеве в предельном переходе дают более чем одно уравнение Пенлеве. Одно из принципиальных отличий дискретных уравнений Пенлеве от непрерывных уравнений заключается в том, что они не имеют одной единственной канонической формы. Обычно у каждого дискретного уравнения Пенлеве имеется несколько канонических форм.

3.11. Пары Лакса для уравнений Пенлеве

Все уравнения Пенлеве могут быть представлены в виде линейных систем уравнений [1, 39, 95]. Эти представления позволяют изучить задачу Коши для этих уравнений так же детально, как и решения линейных уравнений [4]. Поэтому, несмотря на то, что уравнения Пенлеве не имеют первых интегралов в виде полиномов и их решения определяют новые неклассические функции, все они являются точно решаемыми уравнениями.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\psi_{zz} = U(z, \lambda)\psi, \quad (3.11.1)$$

$$\psi_\lambda = 2A(z, \lambda)\psi_z + B(z, \lambda)\psi. \quad (3.11.2)$$

Условие совместности уравнений (3.11.1) и (3.11.2)

$$(\psi_{zz})_\lambda = (\psi_\lambda)_{zz} \quad (3.11.3)$$

приводит к соотношениям:

$$B_z + A_{zz} = 0, \quad (3.11.4)$$

$$U_\lambda = 4U A_z + 2A U_z + B_{zz}. \quad (3.11.5)$$

Подстановка (3.11.4) в (3.11.5) приводит к

$$U_\lambda = 4U A_z + 2A U_z + A_{zzz}. \quad (3.11.6)$$

Полагая в (3.11.6)

$$U = w(z) + \lambda, \quad (3.11.7)$$

$$A(z, \lambda) = -w(z) + 2\lambda \quad (3.11.8)$$

после интегрирования по z , приходим к первому уравнению Пенлеве:

$$w_{zz} = 3w^2 + z. \quad (3.11.9)$$

Таким образом, уравнение (3.11.9) эквивалентно следующей линейной системе уравнений:

$$\psi_{zz} = (w + \lambda)\psi, \quad (3.11.10)$$

$$\psi_\lambda = 2(2\lambda - w)\psi_z + w_z\psi. \quad (3.11.11)$$

Для того чтобы найти систему уравнений, эквивалентную второму уравнению Пенлеве, введем вектор-функцию $\vec{\psi}(z, \lambda)$:

$$\vec{\psi}(z, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.11.12)$$

Предположим, что функция $\vec{\psi}(z, \lambda)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\vec{\psi}_z = \widehat{M}\vec{\psi}, \quad \lambda\vec{\psi}_\lambda = \widehat{N}\vec{\psi} \quad (3.11.13)$$

с матрицами \widehat{M} и \widehat{N} в виде:

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} i\lambda & r(z) \\ r(z) & -i\lambda \end{pmatrix}, \quad \widehat{N} = \begin{pmatrix} A(z, \lambda) & B(z, \lambda) \\ C(z, \lambda) & -A(z, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (3.11.14)$$

Условия совместности системы уравнений (3.11.13)

$$(\psi_{1z})_\lambda = (\psi_{1\lambda})_z \quad (\psi_{2z})_\lambda = (\psi_{2\lambda})_z \quad (3.11.15)$$

приводят к уравнениям:

$$A_z + rB - i\lambda - rC = 0, \quad (3.11.16)$$

$$B_z - 2i\lambda B + 2rA = 0, \quad (3.11.17)$$

$$C_z + 2i\lambda C - 2rA = 0. \quad (3.11.18)$$

Будем искать элементы матриц A, B и C в виде:

$$A = a_0(z)\lambda + a_1(z)\lambda^2 + a_2(z)\lambda^3, \quad (3.11.19)$$

$$B = b_0(z) + b_1(z)\lambda + b_2(z)\lambda^2, \quad (3.11.20)$$

$$C = c_0(z) + c_1(z)\lambda + c_2(z)\lambda^2. \quad (3.11.21)$$

Подставляя (3.11.19), (3.11.20) и (3.11.21) в систему уравнений (3.11.16), (3.11.17) и (3.11.18) и приравнявая выражения при одинаковых степенях λ нулю, находим коэффициенты:

$$a_2 = 4i, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = iz + 2ir^2, \quad (3.11.22)$$

$$b_2 = 4r, \quad b_1 = -2ir_z, \quad b_0 = -\alpha, \quad (3.11.23)$$

$$c_2 = 4r, \quad c_1 = 2ir_z, \quad c_0 = -\alpha. \quad (3.11.24)$$

Подставляя (3.11.22)–(3.11.24) в формулы (3.11.19)–(3.11.21), получаем элементы матриц \widehat{M} и \widehat{N} . При этом система уравнений (3.11.13) эквивалентна второму уравнению Пенлеве относительно функции $r(z)$:

$$r_{zz} = 2r^3 + zr + \alpha. \quad (3.11.25)$$

Оставшиеся уравнения Пенлеве P_3, P_4, P_5 и P_6 также могут быть представлены в виде линейных систем уравнений. Впервые эти факты были установлены Л. Фуксом и Р. Гарнье [39, 93, 95]. По аналогии с линейной системой уравнений, используемой при решении задачи Коши для уравнения Кортевега—де Вриза, в последнее время системы уравнений (3.11.10), (3.11.11) и (3.11.13) часто называются *парами Лакса*.

3.12. Алгоритм Конта—Форди—Пикеринга для анализа уравнений на тест Пенлеве

При исследовании дифференциальных уравнений методом Ковалевской встречаются уравнения, имеющие отрицательные индексы Фукса отличные от -1 . Так, анализируя уравнение

$$w_{zz} + 3w w_z + w^3 = 0, \quad (3.12.1)$$

получаем, что оно имеет два семейства решений, у которых $p = -1, a_0 = 1$ и $p = -1, a_0 = 2$. Причем индексы Фукса для первого семейства решений равны -1 и 1 , а для второго -1 и -2 . Исследование первого семейства решений может быть продолжено методом Ковалевской. Однако при анализе второго семейства решений подход Ковалевской не позволяет найти вторую постоянную интегрирования. Для исследования дифференциальных уравнений с отрицательными индексами Фукса Р. Контом,

А. Форди и Э. Пикерингом предложен алгоритм, обобщающий метод Ковалевской [93].

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$E(w, w_z, \dots, z) = 0. \quad (3.12.2)$$

При реализации алгоритма предполагается, что переменная z остается без изменения, а решение w уравнения (3.12.2) представляются в виде ряда по степеням формального параметра ε :

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n. \quad (3.12.3)$$

Это приводит к тому, что исходное уравнение (3.12.2) представляется в виде:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n E_n. \quad (3.12.4)$$

Исходное уравнение (3.12.2) в этом случае эквивалентно бесконечной последовательности уравнений

$$E_0 \equiv E(w_0, z) = 0, \quad n = 0 \quad (3.12.5)$$

$$E_n \equiv E'[w_0, z]w_n + R_n(w_0, \dots, w_{n-1}, z) = 0, \quad \forall n \geq 1, \quad (3.12.6)$$

где $E'[w_0, z]$ — производная Фреше

$$E'[\omega, z]v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{E(\omega + \lambda v, z) - E(\omega, z)}{\lambda}. \quad (3.12.7)$$

Выражение R_n зависит от предшествующих решений y_0, \dots, y_{n-1} , причем $R_1 \equiv 0$. Каждое уравнение (3.12.6) является линейным дифференциальным уравнением. При $n = 1$ уравнение (3.12.6) является линейным и однородным, а при $n \geq 2$ — неоднородным.

Для того чтобы решение исходного уравнения (3.12.2) не имело критических подвижных особых точек, необходимо, чтобы, общие решения уравнений (3.12.5) и (3.12.6) при $n = 1$ не имели критических подвижных особых точек и чтобы для каждого уравнения (3.12.6) при $n \geq 2$ нашлось частное решение без критических подвижных точек.

Анализ уравнений методом Конта—Форди—Пикеринга, как и алгоритм Ковалевской, состоит из нескольких этапов.

На *первом шаге*, после подстановки

$$y_0 = a_0 \xi^{-p}, \quad \xi = z - z_0, \quad (3.12.8)$$

в ведущие члены уравнения (3.12.5) находятся возможные семейства решений (a_0, p) . При этом требуется, чтобы p имело целые значения, тогда алгоритм исследования может быть продолжен.

Второй шаг аналогичен методу Ковалевской и состоит в нахождении индексов Фукса, которые также должны быть целыми.

На *третьем шаге* ищутся постоянные интегрирования в решении исходного уравнения. При этом решение w_0 исходного уравнения (3.12.5) ищется, как и в методе Ковалевской, в виде

$$w_0 = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{(0)} \xi^{j-p}. \quad (3.12.9)$$

Если алгоритм Конта—Форди—Пикеринга применяется для анализа уравнения имеющего все, кроме -1 , неотрицательные индексы Фукса, то представление (3.12.9), как правило, позволяет определить все постоянные интегрирования уже в разложении (3.12.9). Однако при отрицательных значениях индексов Фукса следует изучать уравнения (3.12.6) при $n \geq 1$. Решение этих уравнений ищется в виде

$$w_n = \sum_{j=n}^{\infty} w_j^{(n)} \xi^{j-p}, \quad n \geq 1, \quad (3.12.10)$$

где r — наименьшее значение индекса Фукса.

Подставляя (3.12.10) в уравнение (3.12.6), при $n = 1$ имеем, что индексы Фукса для этого уравнения определяются значениями $j - p$, где j — индексы определенные ранее. Решение (3.12.10) уравнения (3.12.1) представляет собой частное решение содержащее произвольные коэффициенты, число которых равно количеству индексов Фукса. Поэтому $w^0 + \varepsilon w^1$ является локальным представлением решения исходного уравнения.

При $n \geq 2$ частное решение (3.12.1) уравнения $E_n = 0$ определяется вкладом в R_n решений уравнений предыдущих порядков. В результате двойного представления по существу получается разложение решения исходного уравнения, которое можно представить в виде

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(\sum_{j=nr}^{\infty} w_j^{(n)} \xi^{j-p} \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j \xi^{j-p}. \quad (3.12.11)$$

Чтобы исходное уравнение проходило тест Пенлеве, в разложении решения (3.12.11) должны содержаться произвольные постоянные, количество которых равно порядку уравнения.

3.13. Применение алгоритма Конта—Форди—Пикеринга

Рассмотрим применение алгоритма Конта—Форди—Пикеринга для анализа уравнения (3.12.1). Решение этого уравнения может быть найдено, если в (3.12.1) сделать замену

$$w = \varphi_z \varphi^{-1}. \quad (3.13.1)$$

Тогда исходное уравнение приводится к линейному

$$\varphi_{zzz} = 0. \quad (3.13.2)$$

Общее решение уравнения (3.12.1) имеет вид

$$w = \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b}, \quad (3.13.3)$$

где a и b — произвольные постоянные.

Применим алгоритм Конта—Форди—Пикеринга для анализа уравнения (3.12.1) на свойство Пенлеве [93].

При исследовании первого семейства решений получаем индексы Фукса $j_1 = -1, j_2 = 1$. Подставляя

$$w = x^{-1} + a_1 + a_2x + \dots, \quad x = z - z_0, \quad (3.13.4)$$

получаем: a_1 — произвольная постоянная, $a_2 = -a_1^2$ и т.д.

Применяя алгоритм Ковалевской для исследования семейства решений с отрицательными индексами, получим

$$w = 2x^{-1} + a_1 + a_2x + \dots \quad (3.13.5)$$

Коэффициенты a_1, a_2 и т.д. последовательно находятся. Однако они не дают еще одной произвольной постоянной в решении.

Применяя алгоритм Конта—Форди—Пикеринга, используем разложение решения уравнения (3.12.1) в виде:

$$w = 2x^{-1} + \varepsilon u(x) + \varepsilon^2 v(x) + \varepsilon^3 y(x) + \dots \quad (3.13.6)$$

Подставляя (3.13.6) в исходное уравнение и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε нулю, получим цепочку уравнений:

$$u_{xx} + 6x^{-1}u_x + 6x^{-2}u = 0, \quad (3.13.7)$$

$$v_{xx} + 6x^{-1}v_x + 6x^{-2}v = -3u_x u - 6x^{-1}u^2, \quad (3.13.8)$$

$$y_{xx} + 6x^{-1}y_x + 6x^{-2}y = -(u^3 + 3u v_x + 3v u_x + 12x^{-1}uv). \quad (3.13.9)$$

Полагая

$$u = \frac{u_0}{x^3} + \frac{u_1}{x^2} \quad (3.13.10)$$

в уравнении (3.13.7), получим, что оно удовлетворяется.

Подставляя

$$v(x) = \frac{v_0}{x^5} + \frac{v_1}{x^4} \quad (3.13.11)$$

в уравнение (3.13.8) и принимая во внимание (3.13.10), находим

$$v_1 = \frac{3}{2}u_0u_1 \quad v_0 = \frac{1}{2}u_0^2. \quad (3.13.12)$$

Полагая

$$y(x) = \frac{y_0}{x^7} + \frac{y_1}{x^6} \quad (3.13.13)$$

в уравнении (3.13.9), имеем:

$$y_1 = \frac{5}{4}u_0^2u_1 \quad y_0 = \frac{1}{4}u_0^3. \quad (3.13.14)$$

Результаты вычислений позволяют написать разложение решения исходного уравнения в виде:

$$\begin{aligned} w(x) = & \frac{2}{x} + \varepsilon \left(\frac{u_0}{x^3} + \frac{u_1}{x^2} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{u_0^2}{2x^5} + \frac{3u_0u_1}{2x^4} \right) + \\ & + \varepsilon^3 \left(\frac{u_0^3}{4x^7} + \frac{5u_0^2u_1}{4x^6} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.13.15)$$

Из (3.13.15) следует, что решение имеет две произвольные постоянные u_0 и u_1 , соответствующие отрицательным индексам Фукса. Приближённое решение (3.13.15) может быть просуммировано [93], и в результате находится общее решение уравнения (3.12.1).

3.14. Преобразование Миуры и пара Лакса для уравнения Кортевега—де Вриза

После открытия солитона [155] многие исследователи предприняли попытку найти преобразование, связывающее решения уравнения Кортевега—де Вриза с решениями других точно решаемых уравнений. Это удалось сделать Р. Миуре, который установил, что преобразование

$$u = v_x - v^2 \quad (3.14.1)$$

позволяет находить решения уравнения Кортевега—де Вриза

$$K[u] = u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.14.2)$$

при известном решении модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза

$$M[v] = v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0. \quad (3.14.3)$$

Миура нашел, что для уравнений (3.14.2) и (3.14.3) справедливо соотношение

$$K[u] = \left(\frac{\partial}{\partial x} - 2v \right) M[v]. \quad (3.14.4)$$

Однако само по себе преобразование (3.14.1) не упрощает решение уравнения Кортевега—де Вриза, поскольку связывает решения двух нелинейных уравнений. Тем не менее, именно это преобразование стало ключом к открытию метода обратной задачи рассеяния.

Заметим, что модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза (3.14.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} &= v_t + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) (v_x - v^2) \right] = \\ &= v_t + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) u \right] = 0, \end{aligned}$$

и поэтому уравнения (3.14.1) и (3.14.3) можно записать как систему уравнений:

$$\begin{aligned} v_x &= u + v^2, \\ v_t &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) u \right]. \end{aligned} \quad (3.14.5)$$

При этом условие совместности для уравнений (3.14.5)

$$(v_x)_t = (v_t)_x \quad (3.14.6)$$

дает уравнение Кортевега—де Вриза (3.14.2). Уравнение (3.14.2) допускает группу преобразований Галилея, поэтому в преобразование Миуры (3.14.1) можно добавить постоянное число λ . В этом случае система уравнений (3.14.5) примет вид

$$v_x = u + \lambda + v^2, \quad (3.14.7)$$

$$v_t = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) (u - 2\lambda) \right]. \quad (3.14.8)$$

Если ввести замену

$$v = -\frac{\Psi_x}{\Psi}, \quad (3.14.9)$$

то систему уравнений (3.14.7) можно привести к системе линейных уравнений [155]

$$\Psi_{xx} + (u + \lambda) \Psi = 0, \quad (3.14.10)$$

$$\Psi_t = (c + u_x) \Psi - 2(u - 2\lambda) \Psi_x,$$

где $c(t)$ — находится при интегрировании (3.14.8) по x .

Система уравнений (3.14.10) может быть представлена в виде [155]

$$\hat{L}\Psi = \lambda\Psi; \quad (3.14.11)$$

$$\Psi_t = \hat{A}\Psi, \quad (3.14.12)$$

где \hat{L} — оператор Шредингера

$$\hat{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u \quad (3.14.13)$$

и \hat{A} — вспомогательный эволюционный оператор, имеющий вид

$$\hat{A} = 2(2\lambda - u) \frac{\partial}{\partial x} + (c + u_x). \quad (3.14.14)$$

Используя условие совместности

$$(\Psi_{xx})_t = (\Psi_t)_{xx}, \quad (3.14.15)$$

находим, что уравнение Кортевега—де Вриза эквивалентно операторному уравнению [1, 39, 60]:

$$\hat{L}_t + [\hat{L}, \hat{A}] = 0, \quad (3.14.16)$$

где $[\hat{L}, \hat{A}]$ — коммутатор.

Если задано нелинейное уравнение в частных производных:

$$u_t = E(u, u_x, \dots, x, t), \quad (3.14.17)$$

то можно дать определение.

Определение 3.14. Система уравнений (3.14.11), (3.14.12) называется парой Лакса для уравнения (3.14.17), если операторное уравнение (3.14.16) эквивалентно уравнению (3.14.17).

Уравнение Кортевега—де Вриза относится к классу нелинейных уравнений в частных производных, которые не могут быть сведены к одному линейному уравнению. Однако оно эквивалентно системе линейных уравнений относительно новой функции $\Psi(x, t, \lambda)$.

Используя систему уравнений (3.14.11) и (3.14.12), можно построить решение задачи Коши уравнения Кортевега—де Вриза

методом, получившим название *метода обратной задачи рассеяния*.

В этом методе при заданном начальном условии для уравнения (3.14.2)

$$u(x, t = 0) = f(x), \quad (3.14.18)$$

таком, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |f(x)| dx < \infty, \quad (3.14.19)$$

находятся данные рассеяния путем решения стационарного уравнения Шредингера (3.14.11). Затем, из уравнения (3.14.12) определяется временная зависимость данных рассеяния. После чего решается обратная задача: определяется потенциал, который как раз и является решением уравнения Кортевега—де Вриза.

3.15. Законы сохранения для уравнения Кортевега—де Вриза

Законы сохранения являются важнейшими свойствами физических систем и широко используются при формулировке математических моделей и при решении различных задач математической физики. Они занимают особое место в газовой динамике, поскольку математические модели газовой динамики включают в себя законы сохранения массы, импульса и энергии. Так, уравнение непрерывности, отражающее закон сохранения массы газа, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0, \quad (3.15.1)$$

где ρ — плотность газа; u — его скорость; x — координата; t — время.

Интегрируя это уравнение по x получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = \rho u|_{-\infty}^{\infty}. \quad (3.15.2)$$

Предполагая, что потоки массы газа при $x \rightarrow \pm \infty$ равны нулю, из (3.15.2) находим, что интеграл от плотности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = \text{const} \quad (3.15.3)$$

не зависит от времени и является сохраняющейся величиной. Аналогичные соображения могут быть высказаны относительно любого уравнения математической физики, которое представляется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0. \quad (3.15.4)$$

Определение 3.15. Говорят, что уравнение в частных производных

$$E(u, u_x, u_t, \dots, x, t) = 0 \quad (3.15.5)$$

имеет n законов сохранения, если оно может быть представлено в виде

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial X_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.15.6)$$

где T_i — плотность; X_i — поток; причем T_i и X_i зависят от u и ее производных по x и t .

Открытие солитонов поставило вопрос о законах сохранения для уравнения Кортевега—де Вриза:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.15.7)$$

Очевидно, что это уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{xx} + 3u^2) = 0, \quad (3.15.8)$$

и поэтому для этого уравнения можно взять

$$T_1 = u, \quad X_1 = u_{xx} + 3u^2, \quad (3.15.9)$$

что дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = \text{const}. \quad (3.15.10)$$

Были найдены также два других закона сохранения:

$$T_2 = u^2, \quad X_2 = 2uu_{xx} - u_x^2 + 4u^3, \quad (3.15.11)$$

$$\begin{aligned} T_3 &= u^3 - \frac{1}{2}u_x^2, \\ X_3 &= 3u^2u_{xx} + \frac{9}{2}u^4 - 6uu_x^2 + u_xu_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2. \end{aligned} \quad (3.15.12)$$

Однако новые законы сохранения для уравнения Кортевега—де Вриза оказалось найти сложнее. К. Гарднер предложил для этой цели использовать преобразование Миуры в виде [1, 60]

$$u = w - \varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2, \quad (3.15.13)$$

позволяющее получить соотношение между:

$$w_t + 6(w - \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0 \quad (3.15.14)$$

и уравнением Кортевега—де Вриза (3.15.7). Это соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} &u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \\ &= \left(1 - 2\varepsilon^2 w - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) [w_t + 6(w - \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx}]. \end{aligned} \quad (3.15.15)$$

Из (3.15.15) следует, что $u(x, t)$ не содержит параметр ε . Это возможно, если $w = w(x, t, \varepsilon)$. Будем искать $w(x, t, \varepsilon)$ в виде разложения по степеням ε :

$$w(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \varepsilon^n. \quad (3.15.16)$$

Из (3.15.14) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t, \varepsilon) dx = \text{const}, \quad (3.15.17)$$

и поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_n(x, t) dx = \text{const}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.15.18)$$

Подставляя (3.15.16) в формулу (3.15.13) и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε нулю, имеем

$$w_0 = u, \quad w_1 = w_{0,x} = u_x,$$

$$w_2 = w_{1,x} + w_0^2 = u_{xx} + u^2, \quad (3.15.19)$$

$$w_3 = w_{2,x} + 2w_0w_1 = u_{xxx} + 4uu_x,$$

$$w_4 = w_{3,x} + 2w_0w_2 + w_1^2 = u_{xxx} + 6uu_{xx} + 5u_x^2 + 2u^3.$$

Все эти выражения дают законы сохранения для уравнения Кортевега—де Вриза. Процедура поиска w_n может быть продолжена, что ведет к бесконечному множеству законов сохранения. Это важное свойство типично для точно решаемых уравнений методом обратной задачи рассеяния.

3.16. Преобразования Бэклунда для уравнения Кортевега—де Вриза

Если преобразование Миуры для уравнения Кортевега — де Вриза использовать в виде

$$u = v_x - \lambda - v^2, \quad (3.16.1)$$

где λ — постоянная, то соотношение Миуры примет вид:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) [v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx}]. \quad (3.16.2)$$

Соотношение (3.16.2), связывающее модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза и уравнение Кортевега—де Вриза, после замены $v \rightarrow -v$ остается. Однако решение уравнения Кортевега—де Вриза при этом будет другим

$$u' = -\lambda - v_x - v^2. \quad (3.16.3)$$

Складывая и вычитая (3.16.1), (3.16.3), имеем

$$-\frac{u' + u}{2} = \lambda + v^2, \quad \frac{u - u'}{2} = v_x. \quad (3.16.4)$$

Обозначив

$$u = \omega_x, \quad u' = \omega'_x, \quad (3.16.5)$$

из (3.16.4) находим

$$\omega_x + \omega'_x + 2\lambda + \frac{1}{2}(\omega - \omega')^2 = 0. \quad (3.16.6)$$

Модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза

$$v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} = 0,$$

с учетом (3.16.4) можно записать в виде

$$\omega_t - \omega'_t + 3(\omega'_x + \omega_x)(\omega_x - \omega'_x) + \omega_{xxx} - \omega'_{xxx} = 0. \quad (3.16.7)$$

При этом уравнение, которому удовлетворяют ω и ω' , имеет вид

$$\omega_t + 3\omega_x^2 + \omega_{xxx} = 0. \quad (3.16.8)$$

Система уравнений (3.16.6) и (3.16.7) является преобразованиями Бэклунда для уравнения (3.16.8), поскольку при заданном ω' , решение ω , найденное из (3.16.6), (3.16.7), является также решением уравнения (3.16.8).

Преобразования Бэклунда (3.16.6), (3.16.7) могут быть использованы при нахождении аналитических решений уравнения Кортевега—де Вриза. Полагая $\omega' = 0$ в этой системе, из (3.16.6) имеем уравнение:

$$\omega_x - 2k^2 + \frac{1}{2}\omega^2 = 0, \quad \lambda = -k^2, \quad (3.16.9)$$

с решением в виде

$$\omega(x, t) = 2k \operatorname{th} [kx + c(t)]. \quad (3.16.10)$$

Подставив (3.16.10) в (3.16.7), находим $c(t) = -4k^2t + \varphi_0$, где φ_0 — постоянная. Решение (3.16.10) дает односолитонное решение уравнения Кортевега—де Вриза. Используя итерационный процесс из (3.16.6), (3.16.7), можно найти другие решения уравнения Кортевега—де Вриза.

Однако при нахождении решений удобно воспользоваться алгебраической формулой, которая может быть получена из (3.16.6). Полагая $\omega = \omega_1$, $\omega' = \omega_0$, $2\lambda = -\lambda_1$, из (3.16.6) имеем [39, 60]:

$$\omega_{1x} + \omega_{0x} = \lambda_1 - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_0)^2. \quad (3.16.11)$$

Аналогичным путем получаем соотношения:

$$\omega_{2x} + \omega_{0x} = \lambda_2 - \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)^2, \quad (3.16.12)$$

$$\omega_{3x} + \omega_{1x} = \lambda_2 - \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1)^2, \quad (3.16.13)$$

$$\omega_{3x} + \omega_{2x} = \lambda_1 - \frac{1}{2} (\omega_3 - \omega_1)^2. \quad (3.16.14)$$

Из (3.16.11), (3.16.12), (3.16.13) и (3.16.14) находим формулу:

$$\omega_3 - \omega_0 = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\omega_1 - \omega_2}, \quad (3.16.15)$$

которая полезна при нахождении аналитических решений уравнения Кортевега — де Вриза.

3.17. Преобразования Бэклунда для уравнения sin-Гордона

Найдем преобразование Бэклунда для уравнения sin-Гордона [72]:

$$\varphi_{\xi\tau} = \sin \varphi. \quad (3.17.1)$$

Предположим, что два решения уравнения (3.17.1) представляются через новые переменные u и v :

$$\varphi = u + v, \quad \Psi = u - v, \quad (3.17.2)$$

которые определяются из уравнений:

$$u_{\xi} = f(v), \quad v_{\tau} = g(u). \quad (3.17.3)$$

Здесь $f(v)$ и $g(u)$ — функции, которые требуется найти.

Дифференцируя первое выражение (3.17.3) по τ и второе по ξ , приходим к соотношениям:

$$u_{\xi\tau} = f_v g(u), \quad v_{\tau\xi} = g_u f(v), \quad (3.17.4)$$

из которых после сложения и вычитания находим

$$f_v g(u) + g_u f(v) = \sin \varphi, \quad (3.17.5)$$

$$f_v g(u) - g_u f(v) = \sin \Psi,$$

откуда получаем

$$f_v g(u) = \frac{1}{2} (\sin \varphi + \sin \Psi) = \sin u \cdot \cos v, \quad (3.17.6)$$

$$g_u f(v) = \frac{1}{2} (\sin \varphi - \sin \Psi) = \sin v \cdot \cos u.$$

Разделив первое из этих выражений на второе, имеем

$$\frac{f_v}{f} \operatorname{tg} v = \frac{g_u}{g} \operatorname{tg} u. \quad (3.17.7)$$

Откуда находим

$$f(v) = c_1 \sin v, \quad g(u) = c_2 \sin u, \quad (3.17.8)$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования.

Полагая $c_1 = a$, из (3.17.6) находим: $c_2 = 1/a$.

Поскольку

$$u = \frac{\varphi + \Psi}{2}, \quad v = \frac{\varphi - \Psi}{2},$$

то (3.17.3) можно представить в виде

$$\varphi_\xi + \Psi_\xi = 2a \sin \frac{\varphi - \Psi}{2}, \quad (3.17.9)$$

$$\varphi_\tau - \Psi_\tau = \frac{2}{a} \sin \frac{\varphi + \Psi}{2}. \quad (3.17.10)$$

Эти соотношения являются преобразованиями Бэклунда для уравнения \sin -Гордона. Они получены А. Бэклундом в 1880 году при исследовании поверхностей постоянной отрицательной кривизны, и теперь аналогичные преобразования для нелинейных уравнений называются его именем.

Предполагая, что φ — решение уравнения \sin -Гордона, и исключая φ из (3.17.9), (3.17.10), находим, что Ψ также удовлетворяет уравнению \sin -Гордона. Это обстоятельство позволяет последовательно находить аналитические решения уравнения \sin -Гордона. Очевидно, что $\Psi = 0$ является тривиальным решением уравнения \sin -Гордона. Подставляя $\Psi = 0$ в преобразования (3.17.9), (3.17.10) имеем систему уравнений:

$$\varphi_\xi = 2a \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi_\tau = \frac{2}{a} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (3.17.11)$$

Интегрируя первое уравнение по ξ , а второе по τ , получаем

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4} = T(\tau) e^{2a\xi}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4} = X(\xi) e^{\frac{2\tau}{a}}. \quad (3.17.12)$$

Из сравнения (3.17.12) находим

$$T(\tau) = e^{\frac{2\tau}{a}}, \quad X(\xi) = e^{2a\xi}, \quad (3.17.13)$$

и поэтому

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4} = \exp \left\{ 2 \left(a\xi + \frac{\tau}{a} \right) \right\}. \quad (3.17.14)$$

Откуда имеем решение уравнения \sin -Гордона в виде топологического солитона:

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \left[\pm \exp \left(a\xi + \frac{\tau}{a} \right) \right]. \quad (3.17.15)$$

Указанная процедура нахождения аналитических решений уравнения \sin -Гордона может быть продолжена, если воспользоваться итерационным процессом.

Более сложные решения могут быть получены из формулы, которая выводится из системы четырех уравнений, подобных (3.17.9). Используя соответствующую теорему и тригонометрические формулы, получаем связь между решениями φ_0 , φ_1 , φ_2 и φ_3 уравнения \sin -Гордона в виде [60]

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_0}{2} \right) = \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right), \quad (3.17.16)$$

где λ_i — постоянные ($i = 1, 2$). Применение формулы (3.17.16) при трех известных решениях позволяет находить новые солитонные решения уравнения \sin -Гордона.

3.18. Семейство уравнений Кортевега—де Вриза

В 1968 году П. Лакс решил задачу о нахождении всех уравнений в частных производных, для которых решение задачи Коши может быть получено методом обратной задачи рассеяния с использованием стационарного уравнения Шредингера. Он предложил искать класс уравнений, представимых в виде системы двух линейных уравнений [39]:

$$\Psi_{xx} + (\lambda + u) \Psi = 0; \quad (3.18.1)$$

$$\Psi_t = B(u, u_x, \dots, \lambda) \Psi - 2E(u, u_x, \dots, \lambda) \Psi_x, \quad (3.18.2)$$

где B и E — функции от λ , u и от производных u по x , которые требуется найти.

Условие совместности

$$(\Psi_{xx})_t = (\Psi_t)_{xx} \quad (3.18.3)$$

приводит к соотношениям:

$$B_x = E_{xx}, \quad (3.18.4)$$

$$u_t + B_{xx} + 4(\lambda + u) E_x + 2u_x E = 0. \quad (3.18.5)$$

Подставляя (3.18.4) в (3.18.5), получаем уравнение:

$$u_t + E_{xxx} + 4(\lambda + u) E_x + 2u_x E = 0, \quad (3.18.6)$$

которое зависит от параметра λ .

Предположим, что зависимость E от λ имеет вид

$$E = \sum_{k=0}^n (-4\lambda)^{n-k} E_k, \quad (3.18.7)$$

тогда, подставляя (3.18.7) в (3.18.6) и приравнивая выражения при одинаковых степенях λ нулю, имеем соотношения:

$$E_{0x} = 0, \quad (3.18.8)$$

$$\frac{\partial E_{k+1}}{\partial x} = E_{kxxx} + 4uE_{kx} + 2u_x E_k \quad (k = 0, \dots, n) \quad (3.18.9)$$

и уравнение:

$$u_t + \frac{\partial E_{n+1}}{\partial x} = 0. \quad (3.18.10)$$

Соотношение (3.18.9) является рекурентной формулой для определения оператора Ленарда [39, 134]:

$$E_k = L^k[u], \quad L^0[u] = \frac{1}{2}.$$

Полагая в (3.18.8) $E_0 = \frac{1}{2}$, находим из (3.18.9)

$$E_1 = L^1[u] = u, \quad (3.18.11)$$

$$E_2 = L^2[u] = u_{xx} + 3u^2, \quad (3.18.12)$$

$$E_3 = L^3[u] = u_{xxx} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3, \quad (3.18.13)$$

$$\begin{aligned}
E_4 = L^4[u] = & u_{xxxxxx} + 14uu_{xxxx} + 28u_xu_{xxx} + \\
& + 21u_{xx}^2 + 70u^2u_{xx} + 70uu_x^2 + 35u^4.
\end{aligned} \tag{3.18.14}$$

Подставив (3.18.11)–(3.18.14) в уравнение (3.18.10), получим семейство уравнений [39, 134]:

$$u_1 + \frac{\partial}{\partial x}L^1[u] = u_t + u_x = 0, \tag{3.18.15}$$

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}L^2[u] = u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{3.18.16}$$

$$\begin{aligned}
& u_t + \frac{\partial}{\partial x}L^3[u] = \\
& = u_t + 10uu_{xx} + 30u^2u_x + 20u_xu_{xx} + u_{xxxx} = 0,
\end{aligned} \tag{3.18.17}$$

$$\begin{aligned}
& u_t + \frac{\partial}{\partial x}L^4[u] = u_t + 14uu_{xxxx} + 70u^2u_{xx} + \\
& + 42u_xu_{xxx} + 70u_{xx}u_{xxx} + 280uu_xu_{xx} + \\
& + 70u_x^3 + 140u^3u_x + u_{xxxxxx} = 0.
\end{aligned} \tag{3.18.18}$$

Семейство уравнений (3.18.15)–(3.18.18) называется *иерархией уравнений Кортевега–де Вриза*. Все уравнения этого семейства, очевидно, имеют нечетные порядки, что соответствует отсутствию диссипативных членов. Решения задачи Коши для всех уравнений этого семейства могут быть получены методом обратной задачи рассеяния на основе системы линейных уравнений:

$$\Psi_{xx} + (\lambda + u)\Psi = 0, \tag{3.18.19}$$

$$\begin{aligned} \Psi_t = & \left(c(t) + \sum_{k=0}^n (-4\lambda)^{n-k} L_x^k[u] \right) \Psi - \\ & - 2 \left(\sum_{k=0}^n (-4\lambda)^{n-k} L^k[u] \right) \Psi_x. \end{aligned} \quad (3.18.20)$$

Система уравнений (3.18.19), (3.18.20) является парой Лакса для семейства уравнений Кортевега—де Вриза.

3.19. Тест Абловица—Рамани—Сигура для нелинейных уравнений в частных производных

Открытие К. Гарднера, Д. Грина, М. Крускала и Р. Миуры в 1967 году метода решения уравнения Кортевега—де Вриза привлекло внимание к проблеме интегрирования нелинейных уравнений в частных производных многих исследователей. Последующие результаты В.Е. Захарова и А.Б. Шабата для нелинейного уравнения Шредингера и М. Абловица, Д. Каупа, А. Ньюэлла и Х. Сигура для иерархии АKNС привели к вопросу о критерии, с помощью которого можно было бы установить, является ли нелинейное уравнение точно решаемым или нет.

В этой связи М. Абловиц и Х. Сигур в 1978 году обратили внимание [78, 79] на то, что если в нелинейных уравнениях в частных производных, имеющих решения в виде солитонов, искать решения, используя автомодельные переменные или переменные бегущей волны, то полученные обыкновенные дифференциальные уравнения имеют свойство Пенлеве.

Действительно, если, например, решение модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза

$$v_t - 3v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \quad (3.19.1)$$

искать в переменных бегущей волны

$$v(x, t) = V(\xi), \quad \xi = x - c_0 t, \quad (3.19.2)$$

то для $V(\xi)$ получаем уравнение:

$$V_{\xi\xi} - V^3 - c_0 V + c_1 = 0, \quad (3.19.3)$$

которое имеет свойство Пенлеве, поскольку решение уравнения (3.19.3) может быть выражено через эллиптическую функцию Якоби.

Модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза (3.19.1) допускает группу преобразований неоднородного растяжения [30], и поэтому его решение можно также искать в виде

$$v(x, t) = (3t)^{-1/3} F(\theta), \quad \theta = x(3t)^{-1/3}. \quad (3.19.4)$$

Подставляя (3.19.4) в уравнение (3.19.1) и интегрируя по θ , имеем второе уравнение Пенлеве:

$$F_{\theta\theta} = 2F^3 + \theta F + \alpha, \quad (3.19.5)$$

также обладающее свойством Пенлеве.

Из этих примеров видно, что переход от точно решаемого уравнения (3.19.1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям ведет к уравнениям, имеющим свойство Пенлеве.

Если искать решения уравнения Кортевега—де Вриза:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.19.6)$$

в переменных бегущей волны

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = x - c_0 t, \quad (3.19.7)$$

то для $U(\xi)$ получается уравнение:

$$U_{\xi\xi} + 3U^2 - c_0 U - c_1 = 0, \quad (3.19.8)$$

имеющее также свойство Пенлеве.

Уравнение (3.19.6), как и уравнение (3.19.1), также допускает группу неоднородного растяжения, и его решение можно искать в виде

$$u(x, t) = (3t)^{-2/3} f(\theta), \quad \theta = x(3t)^{-1/3}. \quad (3.19.9)$$

При этом уравнение для $f(\theta)$ имеет вид

$$f_{\theta\theta\theta} + 6ff_{\theta} - \theta f_{\theta} - 2f = 0. \quad (3.19.10)$$

Оно также имеет свойство Пенлеве. Его решение может быть получено, если использовать преобразование Миуры

$$f = F_{\theta} - F^2, \quad (3.19.11)$$

где $F(\theta)$ — решение уравнения (3.19.5).

Если решение уравнения (3.19.6) искать в виде

$$u = q(z) - \lambda t, \quad z = x + 3\lambda t^2, \quad (3.19.12)$$

где λ — параметр, то после интегрирования по z для $q(z)$ получаем первое уравнение Пенлеве:

$$q_{zz} + 3q^2 - \lambda z = c_1. \quad (3.19.13)$$

В качестве еще одного примера рассмотрим нелинейное уравнение Колмогорова—Петровского—Пискунова:

$$u_t = u_{xx} + \alpha u - 6u^2. \quad (3.19.14)$$

В переменных бегущей волны уравнение (3.19.14) принимает вид

$$U_{\xi\xi} - c_0 U_{\xi} + \alpha U - 6U^2 = 0. \quad (3.19.15)$$

Оно не имеет свойства Пенлеве, и, следовательно, исходное уравнение (3.19.14) не является точно решаемым.

Таким образом, действительно, если от точно решаемых нелинейных уравнений в частных производных переходить к обыкновенным дифференциальным уравнениям, то последние оказываются имеющими свойство Пенлеве. Это наблюдение позволило М. Абловицу, А. Рамани и Х. Сигуру высказать гипотезу о свойстве Пенлеве, которое можно рассматривать как критерий интегрируемости нелинейного уравнения в частных производных [1].

Гипотеза о свойстве Пенлеве. Нелинейное уравнение в частных производных является точно решаемым уравнением только в том случае, если любое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, полученное из него в результате замены переменных (автомодельные переменные, переменные бегущей волны и т.д.), имеет (возможно после дополнительного преобразования) свойство Пенлеве.

Эту гипотезу можно использовать как тест для определения точно решаемого нелинейного уравнения в частных производных, который применяется следующим образом.

Пусть задано нелинейное уравнение в частных производных

$$E(u, u_x, u_t, \dots, x, t) = 0, \quad (3.19.16)$$

тогда, используя инвариантные переменные (переменные бегущей волны, автомодельные переменные и т.д.), уравнение (3.19.16) преобразуется к обыкновенному дифференциальному уравнению. Далее анализируется полученное обыкновенное дифференциальное уравнение на свойство Пенлеве. Это может быть сделано путем сравнения со списками уравнений, имеющих свойство Пенлеве или путем специального анализа полученного уравнения. Если исследуемое уравнение имеет свойство Пенлеве, то следует проверить, к каким уравнениям приводят другие подстановки. В случае, если все полученные обыкновенные дифференциальные уравнения имеют свойство Пенлеве, есть основание надеяться, что исходное нелинейное уравнение в частных производных является точно решаемым. Если же какое-либо из обыкновенных дифференциальных уравнений не имеет свойства Пе-

нлевее, то весьма вероятно, что исходное нелинейное уравнение в частных производных не будет интегрируемым. Однако возможны случаи, когда исходное уравнение является точно решаемым, хотя обыкновенное дифференциальное уравнение имеет свойство Пенлеве только после соответствующего преобразования.

3.20. Метод Вайса—Табора—Карневейля для анализа нелинейных уравнений

Применение гипотезы Абловица—Рамани—Сигура для анализа нелинейных уравнений в частных производных является трудоемкой процедурой. Это связано с тем, что, во-первых, требуется найти все преобразования, с помощью которых решения исходного нелинейного уравнения в частных производных можно найти через решения обыкновенного дифференциального уравнения. Для этой цели обычно используется групповой анализ дифференциальных уравнений, открытый Софусом Ли. Во-вторых, требуется исследовать на свойство Пенлеве все обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные из исходного уравнения в частных производных, которых может оказаться достаточно много.

Этот недостаток был устранен в обобщении теста Пенлеве, предложенного в 1983 году в работе Дж. Вайса, М. Табора и Г. Карневейля [150, 151, 152].

Идея метода Вайса—Табора—Карневейля состоит в следующем. Пусть задано нелинейное уравнение в частных производных:

$$E(u_x, u_t, \dots, x, t) = 0. \quad (3.20.1)$$

Его решение ищется в виде разложения

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{j-p}, \quad (3.20.2)$$

где $z(x, t)$ — новая функция, p — число, которое определяется при подстановке

$$u = u_0 z^{-p} \quad (3.20.3)$$

в ведущие члены уравнения (3.20.1). Из сравнения выражений с наименьшими степенями находятся семейства решений с конкретными p и u_0 . При этом коэффициенты u_j в (3.20.2) зависят от производных функции $z(x, t)$.

Метод, предложенный Вайсом, Табором и Карневейлем, во многом напоминает алгоритм Ковалевской, но отличается тем, что вместо переменной $\xi = z - z_0$ используется функция $z(x, t)$ и вместо постоянного коэффициента a_0 предполагается, что коэффициент u_j зависит от производных функции $z(x, t)$. Новая функция $z(x, t)$ является сингулярным многообразием, и поэтому метод Вайса—Табора—Карневейля часто называется методом сингулярных многообразий. Как и в случае алгоритма Ковалевской, на первом этапе в методе Вайса—Табора—Карневейля предполагается, что уравнение (3.20.1) проходит тест Пенлеве, если p в (3.20.2) — целое.

На втором этапе ищутся индексы Фукса точно так же, как для обыкновенных дифференциальных уравнений. С этой целью в ведущие члены уравнения (3.20.1) подставляются выражение

$$u = u_0 z^{-p} + u_r z^{r-p}. \quad (3.20.4)$$

Третий этап исследования состоит в определении произвольных функций для коэффициентов разложения (3.20.2) с номерами, равными индексам Фукса.

Как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения, считается, что (3.20.1) проходит тест Пенлеве, если индексы Фукса — целые и число произвольных функций совпадает с порядком исходного уравнения. Проверка исходного уравнения на свойство Пенлеве, как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения, позволяет сделать вывод лишь о необходимом условии интегрируемости уравнения.

Однако Вайс, Табор и Корневейль пошли дальше и для целого ряда нелинейных уравнений получили достаточное условие интегрируемости. С этой целью они предположили, что $u_j \equiv 0$ при $j > p$ в (3.20.2) и в результате пришли к преобразованию:

$$u = \frac{u_0}{z^p} + \frac{u_1}{z^{p-1}} + \dots + u_p, \quad (3.20.5)$$

позволяющему найти ряд свойств, характерных для точно решаемых нелинейных уравнений в частных производных.

3.21. Пенлеве-анализ уравнения Бюргерса методом Вайса—Табора—Карневейля

Проанализируем уравнение Бюргерса:

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (3.21.1)$$

методом Вайса—Табора—Карневейля [150]. Ведущими членами этого уравнения являются второе и третье слагаемые. Поэтому, подставляя

$$u = \frac{u_0}{z^p}, \quad u_x = \frac{u_{0,x}}{z^p} - \frac{pu_0 z_x}{z^{p+1}},$$

$$u_{xx} = \frac{u_{0,xx}}{z^p} - \frac{2pu_{0,x}z_x}{z^{p+1}} - \frac{pu_0 z_{xx}}{z^{p+1}} + p(p+1) \frac{u_0 z_x^2}{z^{p+2}}$$

в уравнение (3.21.1) и приравнявая выражения нулю при наименьшей степени $z(x, t)$, получаем соотношение:

$$\frac{pu_0^2 z_x}{z^{2p+1}} - \frac{\nu p(p+1) u_0 z_x^2}{z^{p+2}} = 0. \quad (3.21.2)$$

Из равенства (3.21.2) следует, что если $u_0 \neq 0$ и $z_x \neq 0$, то, во-первых, $2p+1 = p+2$, откуда $p = -1$ и, во-вторых,

$$u_0 = -2\nu z_x. \quad (3.21.3)$$

Таким образом, для уравнения Бюргерса имеем одно семейство решений:

$$p = -1, \quad u_0 = -2\nu z_x. \quad (3.21.4)$$

Поскольку $p = -1$, то выполняется первое необходимое условие для того, чтобы уравнение Бюргерса проходило тест Пенлеве.

На втором этапе в ведущие члены уравнения (3.21.1) подставляется соотношение:

$$u = -\frac{2\nu z_x}{z} + u_j z^{j-1}. \quad (3.21.5)$$

Поскольку

$$u_x = -\frac{2\nu z_{xx}}{z} + \frac{2\nu z_x^2}{z^2} + u_j (j-1) z^{j-2} z_x + \dots,$$

$$u_{xx} = -\frac{2\nu z_{xxx}}{z} + \frac{6\nu z_x z_{xx}}{z^2} - \frac{4\nu_x^3 z}{z^3} +$$

$$+ u_j (j-1) (j-2) z_x^2 z^{j-3} + u_j (j-1) z^{j-2} z_{xx} + \dots,$$

то после подстановки u , u_x и u_{xx} в ведущие члены уравнения (3.21.1) и приравнивания выражений при первой степени u_j , имеем соотношение:

$$u_j \nu z_x^2 z^{j-1} [2 - 2(j-1) - (j-1)(j-2)] = 0, \quad (3.21.6)$$

откуда приходим к уравнению для индексов Фукса:

$$j^2 - j - 2 = 0, \quad (3.21.7)$$

имеющему корни $j_1 = -1$, $j_2 = 2$.

Таким образом второе необходимое условие теста Пенлеве для уравнения Бюргерса также выполняется.

Индекс $j_1 = -1$ соответствует произвольно выбранной функции $z(x, t)$, а коэффициент u_2 в (3.20.2) должен быть произвольным.

Подстановка

$$u = -\frac{2\nu z_x}{z} + u_1 + u_2 z \quad (3.21.8)$$

в уравнение (3.21.1) и приравнивание выражений при одинаковых степенях $z(x, t)$ дает следующую цепочку уравнений:

$$z_t + u_1 z_x - \nu z_{xx} = 0, \quad (3.21.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z_t + u_1 z_x - \nu z_{xx}) = 0, \quad (3.21.10)$$

$$u_{1,t} + u_1 u_{1,x} - \nu u_{1,xx} - u_2 z_{xx} - 2u_{2,x} z_x = 0. \quad (3.21.11)$$

Очевидно, что если (3.21.9) удовлетворяется, то (3.21.10) переходит в тождество. Коэффициент u_2 из (3.21.10) не определяется, и поэтому его можно взять произвольным. Таким образом, уравнение Бюргерса проходит тест Пенлеве. Если коэффициент $u_2(x, t)$ взять равным нулю, то уравнение (3.21.11) примет вид

$$u_{1,t} + u_1 u_{1,x} - \nu u_{1,xx} = 0. \quad (3.21.12)$$

Пусть u_1 является решением уравнения (3.21.12). В этом случае из решения линейного уравнения (3.21.9) можно найти $z(x, t)$. Тогда формула (3.21.8) при $u_2 = 0$ примет вид

$$u = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln z + u_1. \quad (3.21.13)$$

Эта формула снова дает решение уравнения Бюргерса.

В частности, поскольку $u_1 = 0$ является тривиальным решением уравнения (3.21.1), то, принимая во внимание (3.21.13), имеем хорошо известное преобразование Коула—Хопфа для решений уравнения Бюргерса [91, 101]:

$$u = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln z. \quad (3.21.14)$$

Это преобразование позволяет по решению уравнения теплопроводности

$$z_t - \nu z_{xx} = 0 \quad (3.21.15)$$

находить решения уравнения (3.21.1). Полагая $u_1 = z$ в (3.21.12), находим, что если $z(x, t)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса, то формула (3.21.13) запишется в виде

$$u = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln z + z. \quad (3.21.16)$$

При известном решении уравнения Бюргерса эта формула позволяет находить другие решения этого уравнения.

Таким образом, анализ уравнения Бюргерса на свойство Пенлеве методом Вайса—Табора—Карневейля позволил, во-первых, установить, что это уравнение проходит тест Пенлеве, и, во-вторых, найти формулу Коула—Хопфа, с помощью которой исходное уравнение может быть сведено к линейному уравнению теплопроводности.

3.22. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса

Покажем, что уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}. \quad (3.22.1)$$

с помощью преобразования [91, 101]

$$u = -2\mu \frac{\partial \ln z}{\partial x} \quad (3.22.2)$$

можно свести к линейному уравнению.

Действительно, учитывая (3.22.2), имеем соотношение:

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{z} (z_t - \mu z_{xx}) \right], \quad (3.22.3)$$

из которого следует, что решение уравнения теплопроводности

$$z_t - \mu z_{xx} = 0 \quad (3.22.4)$$

по формуле (3.22.2) преобразуется в решение уравнения (3.22.1).

Преобразование Коула—Хопфа (3.22.2) позволяет найти решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Пусть в начальный момент имеем

$$u(x, t = 0) = \varphi(x), \quad (3.22.5)$$

тогда из (3.22.2) получаем

$$z(x, t = 0) = \Psi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\mu} \int_0^x \varphi(\xi) d\xi \right\}. \quad (3.22.6)$$

Решение задачи Коши для линейного уравнения теплопроводности находится с помощью функции Грина [4, 64]:

$$z(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\theta) \exp \left\{ -\frac{(x - \theta)^2}{4\mu t} \right\} d\theta. \quad (3.22.7)$$

Используя (3.22.7), получаем решение задачи Коши для уравнения Бюргерса в виде

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \theta)}{t} \exp \left\{ -\frac{G(\theta, x, t)}{2\mu} \right\} d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{G(\theta, x, t)}{2\mu} \right\} d\theta}, \quad (3.22.8)$$

где

$$G(\theta, x, t) = \frac{(x - \theta)^2}{2t} + \int_0^\theta \varphi(\xi) d\xi. \quad (3.22.9)$$

Рассмотрим решение (3.22.8) при фиксированных x и t и при $\mu \rightarrow 0$. Основной вклад в интегралы в (3.22.8) дают окрестности стационарных точек функции $G(\theta, x, t)$, таких, что

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \varphi(\theta) - \frac{x - \theta}{t} = 0. \quad (3.22.10)$$

Пусть $\theta^* = \theta(x, t)$ — решение этого уравнения, тогда интеграл вблизи $\theta = \theta^*$ вычисляется приближенно методом перевала [4] в соответствии с формулой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) \exp \left\{ -\frac{G(\theta, x, t)}{2\mu} \right\} d\theta \approx g(\theta^*) \left(\frac{4\pi\mu}{G''(\theta^*)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{G(\theta^*)}{2\mu} \right\}.$$

В этом случае из (3.22.8) имеем

$$u(x, t) \approx \frac{x - \theta^*}{t}, \quad (3.22.11)$$

где θ^* — корень уравнения

$$\varphi(\theta^*) - \frac{x - \theta^*}{t} = 0. \quad (3.22.12)$$

Таким образом, решение (3.22.8) при $\mu \rightarrow 0$ можно представить в виде

$$u(x, t) \approx \varphi(\theta^*), \quad x = \theta^* + \varphi(\theta^*) t. \quad (3.22.13)$$

Оно совпадает с решением задачи Коши для простейшего квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, t = 0) = \varphi(x), \quad (3.22.14)$$

которое получено в п. 1.10 методом характеристик.

Таким образом, решение задачи Коши для уравнения Бюргерса находится в виде квадратур и это уравнение можно отнести к числу интегрируемых уравнений. Однако, как правило, о таких уравнениях говорят, как о точно решаемых, оставляя понятие интегрируемых уравнений за гамильтоновыми системами.

3.23. Анализ уравнения Кортевега—де Вриза методом Вайса—Табора—Карневейля

Проверим уравнение Кортевега—де Вриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.23.1)$$

на свойство Пенлеве, используя метод Вайса—Табора—Карневейля [150].

Ведущими членами уравнения являются второе и третье слагаемые. Подставляя (3.20.3) в эти слагаемые и приравняв нулю выражения при наименьшей степени $z(x, t)$, находим соотношение

$$-\frac{6p u_0^2 z_x}{z^{2p+1}} = \frac{p(p+1)(p+2) u_0 z_x^3}{z^{p+3}}, \quad (3.23.2)$$

из которого следует, что $p = 2$, $u_0 = -2z_x^2$. Таким образом, уравнение Кортевега—де Вриза имеет одно семейство решений, у которого

$$p = 2, \quad u_0 = -2z_x^2. \quad (3.23.3)$$

Из (3.23.3) следует, что первое необходимое условие теста Пенлеве для уравнения (3.21.16) выполняется.

Подставляя выражение

$$u = -2z_x^2 z^{-2} + u_j z^{j-2} \quad (3.23.4)$$

снова в ведущие члены уравнения и приравнявая нулю слагаемые при первой степени u_j , имеем соотношение:

$$u_j z_x^3 z^{j-5} [(j-2)(j-3)(j-4) - 12(j-2) + 24] = 0, \quad (3.23.5)$$

из которого следует уравнение для индексов Фукса:

$$j^3 - 9j^2 + 14j + 24 = 0. \quad (3.23.6)$$

Это уравнение имеет корни $j_1 = -1$, $j_2 = 4$, $j_3 = 6$, откуда следует, что уравнение Кортевега—де Вриза на втором этапе также проходит тест Пенлеве.

На третьем этапе исследования проверяется произвольность коэффициентов u_4 и u_6 . С этой целью в уравнение (3.23.1) подставляется выражение

$$u = -2z_x^2 z^{-2} + u_1 z^{-1} + u_2 + u_3 z + u_4 z^2 + u_5 z^3 + u_6 z^4. \quad (3.23.7)$$

Приравнявая нулю выражения при степенях z^{-4} , z^{-3} , \dots , z^{-1} и z^0 , соответственно, получаем

$$u_1 = 2z_{xx}, \quad (3.23.8)$$

$$z_t z_x + 4z_x z_{xxx} - 3z_{xx}^2 + 6u_2 z_x^2 = 0, \quad (3.23.9)$$

$$z_{xt} + 6u_2 z_{xx} + z_{xxx} - 6u_3 z_x^2 = 0, \quad (3.23.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (z_{xt} + z_{xxx} + 6u_2 z_{xx} - 6u_3 z_x^2) = 0. \quad (3.23.11)$$

Из (3.23.11) следует, что при выполнении (3.23.10) уравнение (3.23.11) также удовлетворяется, и, следовательно, коэффициент u_4 может быть взят произвольным. Продолжая вычисления дальше, устанавливаем, что коэффициент u_6 можно также взять произвольным.

Полагая $u_j = 0$ при $j \geq 2$, из (3.23.7) имеем

$$u = -\frac{2z_x^2}{z^2} + \frac{2z_{xx}}{z} + u_2 = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln z + u_2, \quad (3.23.12)$$

где u_2 удовлетворяет опять же уравнению Кортевега—де Вриза

$$u_{2t} + 6u_2 u_{2,x} + u_{2,xxx} = 0. \quad (3.23.13)$$

Таким образом, применение теста Пенлеве для уравнения Кортевега—де Вриза показало, что необходимое условие интегрируемости для него выполняется. В работах Дж. Вайса [150, 151, 152, 153] проиллюстрировано, что уравнение \sin -Гордона, нелинейное уравнение Шредингера и ряд других нелинейных уравнений в частных производных также проходят тест Пенлеве.

3.24. Построение пары Лакса для уравнения Кортвега—де Вриза методом Вайса—Табора—Карневейля

Пара Лакса для уравнения Кортвега—де Вриза может быть получена из системы уравнений (3.23.9), (3.23.10) при условии, что u_2 является решением уравнения (3.23.13) [150].

Из уравнения (3.23.9) имеем

$$z_t = \frac{3z_{xx}^2}{z_x} - 6u_2 z_x - 4z_{xxx}. \quad (3.24.1)$$

Подставляя (3.24.1) в (3.23.10), получаем

$$\frac{6z_{xx}z_{xxx}}{z_x} - \frac{3z_{xx}^3}{z_x^2} - 6u_{2x}z_x - 3z_{xxxx} = 0, \quad (3.24.2)$$

откуда находим

$$\frac{z_{xxx}}{z_x} - \frac{1}{2} \frac{z_{xx}^2}{z_x^2} + 2u_2 = \lambda(t), \quad (3.24.3)$$

где λ — функция, появившаяся при интегрировании по x .

Пусть

$$z_x = \Psi^2, \quad (3.24.4)$$

тогда из (3.24.3) имеем

$$\Psi_{xx} + (u_2 - \lambda) \Psi = 0. \quad (3.24.5)$$

С другой стороны, подставляя (3.24.4) в уравнение (3.23.10), при $u_3 = 0$ приходим к уравнению:

$$\Psi_t + 6u_2 \Psi_x - \Psi_x(u_2 + \lambda) + \Psi_{xxx} = 0. \quad (3.24.6)$$

Система уравнений (3.24.5), (3.24.6), в которой λ — постоянная, является парой Лакса для уравнения Кортвега—де Вриза. Таким образом, используя метод Вайса—Табора—Карневейля можно получить пару Лакса для уравнения Кортвега—де Вриза.

Глава 4

Методы решения интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных

4.1. Общие, частные и точные решения дифференциальных уравнений

При формулировке математических моделей встречаются дифференциальные уравнения двух видов: обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Математическая модель, как правило, включает в себя одно или несколько дифференциальных или алгебраических уравнений и начальные, а в ряде случаев и граничные, условия. Основная задача, которая возникает при исследовании математических моделей, — найти решения уравнений или доказать существование и единственность этих решений.

Остановимся на основных понятиях, относящихся к решениям дифференциальных уравнений. Пусть задано ОДУ n -го порядка:

$$E(w, w_z, \dots, w_{n,z}, z) = 0, \quad w_{n,z} = \frac{d^n w}{dz^n}. \quad (4.1.1)$$

Под классическим решением $w = \varphi(z)$ (в последние десятилетия интенсивно изучаются и обобщенные решения) уравнения (4.1.1) понимается любая достаточное число раз дифференцируемая функция, которая после подстановки в уравнение (4.1.1) обращает его в тождество хотя бы в некоторой области переменных z, w .

Функция $w = \varphi(z)$ может зависеть от произвольных постоянных, число которых не превышает порядок дифференциального уравнения

$$w = \varphi(z) = \Phi(z, C_1, C_2, \dots, C_k), \quad (k \leq n). \quad (4.1.2)$$

Если число независимых произвольных постоянных решения $w(z) = \Phi(z, C_1, C_2, \dots, C_k)$ обыкновенного дифференциального уравнения равно порядку дифференциального уравнения ($k = n$), то такое решение обыкновенного дифференциального уравнения называется общим решением (4.1.1).

Полагая постоянные C_1, C_2, \dots, C_n в решении $w(z) = \Phi(z, C_1, C_2, \dots, C_k)$ заданными, мы получаем частное решение дифференциального уравнения.

Частные решения возникают при решении задачи, описываемой уравнением (4.1.1) при заданных начальных условиях (задача Коши):

$$\begin{aligned} w(z = z_0) &= \Phi(z_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = w_0, \\ w_z(z = z_0) &= \Phi_z(z_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = w_1, \\ &\dots, \\ w_{n-1,z}(z = z_0) &= \Phi_{n-1,z}(z_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = w_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Условия (4.1.3) можно рассматривать как систему уравнений для определения значений произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n ,

позволяющую из бесконечного множества решений уравнения (4.1.1) выбрать конкретную интегральную кривую, проходящую через точку $z = z_0, w_0$.

В качестве примера рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка (уравнение Риккати)

$$w_z = -w^2 + a w + b. \quad (4.1.4)$$

Полагая

$$w(z) = \frac{\psi_z}{\psi}, \quad (4.1.5)$$

из уравнения (4.1.4) получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\psi_{zz} - a \psi_z - b \psi = 0. \quad (4.1.6)$$

Общее решение уравнения (4.1.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(z) &= C_1 \exp(\lambda_1 z) + C_2 \exp(\lambda_2 z), \\ \lambda_{1,2} &= \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Решение (4.1.7) зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 . Однако подставляя решение (4.1.7) в (4.1.5), имеем решение исходного уравнения, зависящее от одной произвольной постоянной:

$$w(z) = \frac{C_3 \lambda_1 \exp(\lambda_1 z) + \lambda_2 \exp(\lambda_2 z)}{C_3 \exp(\lambda_1 z) + \exp(\lambda_2 z)}, \quad C_3 = \frac{C_1}{C_2}. \quad (4.1.8)$$

В зависимости от значений параметров уравнения (4.1.4) его решение выражается через гиперболические, тригонометрические, показательные или рациональные функции.

Пусть в уравнении (4.1.4) $a = 0$, тогда $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{b}$, решение (4.1.4) имеет вид:

$$w(z) = \sqrt{b} \tanh\{z \sqrt{b} + \varphi_0\}, \quad (4.1.9)$$

где φ_0 — произвольная постоянная.

При $b = 0$ из (4.1.8) в уравнении (4.1.4) имеем решение в виде

$$w(z) = \frac{a \exp(a z + \varphi_0)}{1 + \exp(a z + \varphi_0)}. \quad (4.1.10)$$

Полагая $a = b = 0$ в уравнении (4.1.4), получаем решение в виде

$$w(z) = \frac{1}{z - C_1}. \quad (4.1.11)$$

Часто общее решение дифференциального уравнения найти не удастся, тогда ищутся решения, зависящие от меньшего числа произвольных постоянных, чем порядок уравнения. О таких решениях дифференциального уравнения говорят как о точных решениях.

Определение 4.1. Точным решением дифференциального уравнения (или систем уравнений) будем называть решение, выраженное через некоторую элементарную или специальную функцию, как правило, при меньшем числе произвольных постоянных, необходимых для построения общего решения.

Для уравнения в частных производных общее решение, как правило, найти (а иногда и дать его определение) не удастся, хотя понятие общего решения и для уравнений в частных производных встречается периодической литературе.

Об общем решении для уравнения в частных производных говорят, если в решении уравнения появляются произвольные функции. Например, общее решение уравнения в частных производных

$$u_{xt} = 0 \quad (4.1.12)$$

имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(x) + \psi(t) \quad (4.1.13)$$

Хорошо известно, что решение волнового уравнения

$$u_{tt} = c_0^2 u_{xx} \quad (4.1.14)$$

представляется формулой Даламбера

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \quad (4.1.15)$$

где функции f и g определяются из начальных условий, заданных для волнового уравнения. О решении (4.1.15) часто говорят как об общем решении волнового уравнения (4.1.14).

Для уравнений в частных производных может решаться задача при заданных начальных условиях. Как и для обыкновенного дифференциального уравнения, в этих случаях говорят о решении задачи Коши. Если для нелинейного уравнения в частных производных, задача Коши решается для достаточно большого класса функций, заданных в качестве начальных данных, то о таких уравнениях говорят как о точно решаемых или интегрируемых уравнениях.

Однако для многих нелинейных уравнений в частных производных решение задач Коши в общем случае не находится, и тогда исследователи пытаются получить точные решения этих уравнений, сужая класс функций, среди которых ищутся решения исходного уравнения. Для нелинейных уравнений в частных производных в этих случаях делается попытка искать решения, используя переменные бегущей волны, автомодельные решения, или какой-либо иной тип инвариантных решений. Если для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения удастся найти решение, которое содержит меньше произвольных постоянных, чем порядок исходного уравнения, то опять же говорят о точных решениях уравнения.

4.2. Простейшие решения уравнения Кортевега—де Вриза

В настоящее время хорошо известно, как находить решения линейных дифференциальных уравнений [35, 36]. Однако для

задач, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и нелинейными уравнениями в частных производных, методы построения решений значительно усложняются.

Пусть требуется решить уравнение второго порядка

$$y_{zz} = F[y], \quad (4.2.1)$$

где правая часть является полиномом от y :

$$F[y] = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n. \quad (4.2.2)$$

К такому классу уравнений относятся многие уравнения, встречающиеся при описании волновых процессов.

После умножения на y_z решение уравнения (4.2.1) сводится к вычислению интеграла

$$\int \left(2a_0 y + a_1 y^2 + \frac{1}{3} a_2 y^3 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n y^{n+1} + C_2 \right)^{-\frac{1}{2}} dy = z, \quad (4.2.3)$$

где C_2 — постоянная интегрирования. При $n = 3$ задача вычисления интеграла (4.2.3) решается в явном виде. В этом случае интеграл (4.2.3) принимает вид:

$$\int \left(2a_0 y + a_1 y^2 + \frac{1}{3} a_2 y^3 + \frac{1}{4} a_3 y^4 + C_2 \right)^{-\frac{1}{2}} dy = z. \quad (4.2.4)$$

При $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ интеграл (4.2.4) выражается через обратные тригонометрические функции (и следовательно, общее решение уравнения (4.2.1) определяется через тригонометрические функции). В случае $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$ интеграл сводится к эллиптическому интегралу, решение определяется функцией Вейерштрасса. При $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$,

$a_3 \neq 0$ интеграл (4.2.4) заменой переменных приводится к эллиптическому интегралу первого рода и общее решение уравнения (4.2.1) выражается через эллиптическую функцию Якоби [39]. Эллиптические функции Вейерштрасса и Якоби являются соответствующим обобщением тригонометрических функций.

Теория эллиптических функций получила свое развитие в трудах Н. Абеля и К. Якоби как естественное обобщение тригонометрических функций. В отличие от тригонометрических функций, имеющих действительные периоды, эллиптические функции являются двоякопериодическими, имеющими как действительный, так и мнимый периоды. На комплексной плоскости тригонометрические функции не имеют особых точек, тогда как эллиптические функции являются мероморфными функциями и имеют на комплексной плоскости особые точки в виде изолированных полюсов.

Уравнение Кортевега—де Вриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.2.5)$$

имеет волновое решение, известное с конца прошлого века. Оно выражается через специальную функцию Якоби. Заметим, что уравнение (4.2.5) допускает группу преобразований сдвига по x и t , поэтому оно имеет решения в переменных бегущей волны

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - C_0 t. \quad (4.2.6)$$

В этом случае уравнение (4.2.5) запишется в виде

$$y_{zz} + 3y^2 - C_0 y + C_1 = 0. \quad (4.2.7)$$

Умножив последнее уравнение на y_z и снова проинтегрировав по z , получим

$$\frac{y_z^2}{2} + y^3 - \frac{C_0 y^2}{2} + C_1 y + C_2 = 0. \quad (4.2.8)$$

Отсюда находим

$$y_z^2 = -2f(y), \quad f(y) = \left(y^3 - \frac{C_0 y^2}{2} + C_1 y + C_2 \right). \quad (4.2.9)$$

Функцию $f(y)$ можно представить в виде:

$$f(y) = (y - \alpha)(y - \beta)(y - \gamma). \quad (4.2.10)$$

Здесь α, β и γ ($\alpha \geq \beta \geq \gamma$) — действительные корни кубического уравнения

$$y^3 - \frac{C_0 y^2}{2} + C_1 y + C_2 = 0. \quad (4.2.11)$$

Из (4.2.11) имеем

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= -C_2, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma &= C_1, \\ \alpha + \beta + \gamma &= \frac{C_0}{2}. \end{aligned}$$

Уравнение (4.2.9) можно преобразовать к виду:

$$\frac{dy}{\sqrt{2(\alpha - y)(y - \beta)(y - \gamma)}} = dz. \quad (4.2.12)$$

Если ввести обозначения

$$y = \alpha - p^2, \quad p = \sqrt{\alpha - \beta} q, \quad S^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}, \quad (4.2.13)$$

то уравнению (4.2.12) можно придать вид:

$$\int_0^q \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - S^2 x^2)}} = \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{2}} (z - z_0). \quad (4.2.14)$$

Учитывая, что в левой части выражения появился эллиптический интеграл 1-го рода

$$F(\arcsin q, S) = \operatorname{sn}^{-1}(q, S) = \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{2}}(z - z_0), \quad (4.2.15)$$

имеем окончательно решение

$$q = \operatorname{sn} \left\{ \left(\frac{\alpha - \gamma}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (z - z_0), S^2 \right\},$$

где $\operatorname{sn}(z)$ — эллиптическая функция Якоби.

Принимая во внимание обозначения (4.2.13), находим

$$y(z) = \alpha - (\alpha - \beta) \operatorname{sn}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{2}}(z - z_0), S^2 \right\}. \quad (4.2.16)$$

В силу известной формулы для эллиптических функций

$$\operatorname{sn}^2(z) + \operatorname{cn}^2(z) = 1$$

решение уравнения Кортевега—де Вриза можно представить в виде

$$u(x, t) = \beta + (\alpha - \beta) \operatorname{cn}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{2}}(z - z_0), S^2 \right\}. \quad (4.2.17)$$

Отметим, что S в (4.2.16), (4.2.17) удовлетворяет неравенству $0 \leq S \leq 1$, а скорость волны C_0 определяется выражением

$$C_0 = 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Решение (4.2.17) уравнения (4.2.5) является волной с периодом

$$T = 2\sqrt{\frac{2}{\alpha - \gamma}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-S^2x^2)}} = \sqrt{\frac{8}{\alpha - \gamma}} K(S), \quad (4.2.18)$$

где $K(S)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Если $\alpha > \beta = \gamma$, то период (4.2.18) стремится к бесконечности. При этом из (4.2.17) получаем уединенную волну

$$u(x, t) = y(z) = \beta + (\alpha - \beta) \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{2}} (z - z_0) \right\}. \quad (4.2.19)$$

Обычно полагают $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 2k^2$, и тогда решение (4.2.19) уравнения (4.2.5) имеет вид

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{ch}^{-2} \{ k(x - 4k^2 t) + \chi_0 \}, \quad (4.2.20)$$

где χ_0 — произвольная постоянная. Решение (4.2.17) является периодической волной, описываемой уравнением Кортевега—де Вриза. Иногда эта волна называется кноидальной по виду обозначения эллиптической функции Якоби. В предельном случае при малой амплитуде это решение переходит в синусоидальную волну хорошо известную из теории волн. С другой стороны, решение (4.2.19) является также предельным для случая бесконечно большого периода ($S = 1$). Именно этот предельный случай является уединенной волной, соответствующей наблюдению Джона Рассела в 1834 году.

Решения (4.2.17) и (4.2.20) уравнения Кортевега—де Вриза являются бегущими волнами. Это означает, что решения зависят от координаты x и времени t через переменную $z = x - C_0 t$. Эта переменная характеризует положение точки, движущейся со скоростью волны C_0 , то есть определяет положение наблюдателя, который постоянно находится на гребне волны. Таким образом, решение уравнения Кортевега—де Вриза в отличие от решений линейного волнового уравнения — волна, распространяющая лишь в

одном направлении. Однако это решение учитывает проявление более сложных эффектов вследствие наличия дополнительных слагаемых uu_x и u_{xxx} .

В действительности, это уравнение является также приближенным, поскольку при его выводе использованы малые параметры ϵ и δ . Если пренебречь влиянием этих параметров, устремляя их к нулю, мы получим одну из частей решения волнового уравнения.

При выводе уравнения для длинных волн на воде влияние параметров ϵ и δ может быть учтено более точно, но тогда получится уравнение, содержащее гораздо больше слагаемых, чем уравнение (4.2.5) и с производными более высокого порядка. Из сказанного следует, что решение уравнения Кортевега—де Вриза для описания волн справедливо только на определенном расстоянии от места образования волны и на определенном промежутке времени. На больших расстояниях нелинейные волны уже не будут описываться уравнением Кортевега—де Вриза, и для описания процесса потребуется более точная модель. Уравнение Кортевега—де Вриза в этом смысле следует рассматривать как некоторое приближение (математическую модель), соответствующее с определенной степенью точности реальному процессу распространения волн на воде.

4.3. Автомоделные решения уравнения Кортевега—де Вриза

Из п. 2.9 следует, что уравнение Кортевега—де Вриза допускает группу преобразований растяжения по переменным t , x и u , и поэтому уравнение (4.2.5) имеет решение в виде [121]

$$u(x, t) = \frac{1}{(3t)^{2/3}} y(z), \quad z = \frac{x}{(3t)^{1/3}} \quad (4.3.1)$$

Подставляя (4.3.1) в уравнение (4.2.5), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение в виде [2]

$$y_{zzz} + 6 y y_z - z y_z - 2 y = 0. \quad (4.3.2)$$

Решение уравнения (4.3.2) можно найти, если воспользоваться преобразованием Миуры [1, 39, 60]

$$u = w_z - w^2 \quad (4.3.3)$$

Подставляя (4.3.3) в уравнение (4.3.2), приходим к уравнению четвертого порядка

$$\begin{aligned} E_1[w] = w_{zzzz} - 2 w w_{zzz} - 12 w w_z^2 - 6 w^2 w_{zz} + 12 w^3 w_z - \\ - z w_{zz} + 2 z w w_z - 2 w_z + 2 w^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Последнее уравнение можно представить в виде

$$E_1[w] = \left(\frac{d}{dz} - 2w \right) \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2 w}{dz^2} - 2w^3 - zw + \alpha \right) = 0. \quad (4.3.5)$$

Из соотношения (4.3.5) следует, что решение уравнения (4.3.2) выражается через решение уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - 2w^3 - zw + \alpha = 0. \quad (4.3.6)$$

по формуле (4.3.3).

Уравнение (4.3.6) является вторым уравнением Пенлеве. Решения уравнения (4.3.6), в общем случае, выражаются через трансцендентные функции, называемые трансцендентами Пенлеве [1, 18, 39]. При целых α уравнение имеет решения в виде рациональных функций. В случае полуцелых значений α уравнение (4.3.6) имеет решения, выраженные через функции Эйри.

Таким образом, автомодельные решения уравнения Кортевега—де Вриза $y(z)$ выражаются через решения $w(z)$ второго уравнения Пенлеве (4.3.6).

4.4. Метод обратной задачи рассеяния решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Вриза

Метод обратной задачи рассеяния для построения решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Вриза был открыт Гарднером, Гринем, Миурой и Крускалом в 1967 году [99]. В настоящее время это один из самых мощных методов, и, говоря о точно решаемом или интегрируемом нелинейном уравнении в частных производных, имеют в виду, что решение задачи Коши для этого уравнения находится методом обратной задачи рассеяния.

Рассмотрим применение метода обратной задачи рассеяния для уравнения Кортевега—де Вриза. При некоторых модификациях этот метод применим для решения задачи Коши для уравнения \sin -Гордона, для нелинейного уравнения Шредингера, и для уравнения Кадомцева—Петвиашвили и многих других нелинейных уравнений [1, 20, 24, 39, 99].

Задача, которую требуется решить: найти решение уравнения Кортевега—де Вриза

$$u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.4.1)$$

при заданном начальном условии

$$u(x, t = 0) = f(x). \quad (4.4.2)$$

Известно [1, 20, 24, 39, 99], что уравнение Кортевега—де Вриза (4.4.1) может быть представлено в виде системы линейных уравнений относительно новой функции $\psi(x, t)$. Эта система называется парой Лакса и имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + (\lambda - u) \psi &= 0, \\ \psi_t - 2(2\lambda + u) \psi_x + (u_x - C(t)) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Система уравнений (4.4.3) эквивалентна уравнению (4.4.1) в том смысле, что исключение функции $\psi(x, t)$ из нее приводит к

уравнению Кортевега—де Вриза [39].

На функцию $f(x)$ накладывается ограничение

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |f(x)| dx < \infty, \quad (4.4.4)$$

которое следует из необходимости существования конечного числа собственных значений оператора Шредингера.

Решение задачи Коши для уравнения Кортевега — де Вриза можно условно представить в виде трех шагов.

На первом шаге проводится решение прямой задачи квантовой механики. Суть задачи состоит в том, что при заданном потенциале $f(x)$ решается вопрос о нахождении собственных значений и собственных функций для оператора Шредингера

$$\psi_{xx} + (\lambda - U) \psi = 0, \quad U(x) = f(x). \quad (4.4.5)$$

В результате решения такой задачи находятся данные рассеяния плоской волны на потенциале $f(x)$

$$S_n(t = 0) = \{\lambda_n; \quad r(k, 0); \quad b_n(0) \quad (n = 1, \dots, N)\}, \quad (4.4.6)$$

где λ_n — дискретный спектр собственных значений оператора Шредингера

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + f(x). \quad (4.4.7)$$

Коэффициенты $b_n(0)$ — амплитуды волновых функций дискретного спектра, $r(k, 0)$ — коэффициенты отражения плоской волны на потенциале $f(x)$.

На втором шаге определяется временная эволюция данных рассеяния. Она находится из вспомогательного (второго) уравнения пары Лакса в соответствии с теоремой.

Теорема 4.1. Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега—де Вриза, тогда данные рассеяния имеют следующую зависимость от времени

$$\begin{aligned}\lambda_n(t) &= \lambda_n(0), \quad r(k, t) = r(k, 0) \exp(8ik^3 t), \\ b_n(t) &= b_n(0) \exp(8\chi^3 t), \quad (n = 1, \dots, N).\end{aligned}\tag{4.4.8}$$

Здесь введены обозначения: $\lambda_n = k_n^2 = -\chi_n^2$.

Результатом решения задачи на втором шаге является временная эволюция данных рассеяния.

На третьем шаге решается обратная задача квантовой механики и определяется зависимость $u(x, t)$, которая является решением задачи Коши для уравнения Кортевега—де Вриза [39].

В работах В.А. Марченко [56] и И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана [16] показано, что при известных данных рассеяния S_n можно восстановить потенциал, на котором происходит рассеяние плоской волны, если решить интегральное уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, z) F(z+y) dz = 0, \tag{4.4.9}$$

где функция $F(x)$ выражается через данные рассеяния

$$F(x) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n \exp(-\chi_n x)}{i a_k(i\chi_n)} + \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty r(k) \exp(ikx) dx, \tag{4.4.10}$$

где $a_k = \frac{da}{dk}$, $a(k) = \frac{1}{t(k)}$, $t(k)$ — коэффициент прохождения плоской волны, который определяется через коэффициент отражения $r(k)$ [39].

По найденному ядру интегрального уравнения $K(x, y)$ потенциал находится по формуле:

$$U(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (4.4.11)$$

По аналогии с решением обратной задачи квантовой механики при решении задачи Коши для уравнения Кортевега—де Вриза используются данные рассеяния:

$$S_n(t) = \{\lambda_n(t); r(k, 0) \exp(8ik^3 t); b_n(0) \exp(8\chi_n^3 t); \\ (n = 1, \dots, N)\}. \quad (4.4.12)$$

В данном случае учитывается функция $F(x, y, t)$, в которой принимается во внимание зависимость данных рассеяния от времени [39]

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n \exp\{8\chi_n^3 t - \chi_n x\}}{i a_k(i\chi_n)} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty r(k) \exp\{ikx + 8ik^3 t\} dx. \quad (4.4.13)$$

Из решения интегрального уравнения

$$F(x + y, t) + K(x, y, t) + \int_x^\infty K(x, z, t) F(z + y, t) dz = 0,$$

в котором время t рассматривается как параметр, находится ядро $K(x, y, t)$, и решение задачи Коши для уравнения Кортевега—де Вриза определяется по формуле

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t). \quad (4.4.14)$$

Задача упрощается в случае рассмотрения безотражательного потенциала $r(k, t) = 0$. Реально решить задачу Коши для уравнения Кортевега—де Вриза не просто, поскольку при этом решаются прямая и обратная задачи квантовой механики, и не всегда выражения могут быть получены в виде явных формул. Однако

на каждом этапе решаются линейные уравнения, которые могут быть исследованы так же детально, как и большинство линейных задач [39].

4.5. Метод Хироты для нахождения солитонных решений уравнения Кортевега—де Вриза

Эффективные прямые методы нахождения солитонных решений были разработаны Р. Хиротой в начале 70-х годов двадцатого века. Эти методы применимы для всех точно решаемых уравнений. Алгоритм метода состоит в том, что на первом этапе ищется замена зависимой переменной, позволяющая привести исходное уравнение к так называемой билинейной форме. На втором этапе решение уравнения в билинейной форме ищется в виде формального ряда теории возмущений. Для точно решаемых уравнений эти ряды обрываются. На третьем этапе делается предположение о виде солитонного решения уравнения и методом математической индукции доказывается формула для солитонного решения.

Метод Хироты, как правило, иллюстрируется на примере уравнения Кортевега—де Вриза, и мы будем следовать этой традиции. Для этой цели воспользуемся преобразованием [1, 39, 60, 66, 105]

$$u = 2 \frac{\partial^2 \ln F}{\partial x^2}. \quad (4.5.1)$$

Подставляя (4.5.1) в уравнение

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (4.5.2)$$

после интегрирования по x получаем уравнение в виде:

$$F_{xt}F - F_xF_t + F F_{xxx} - 4F_xF_{xx} + 3F_{xx}^2 = 0. \quad (4.5.3)$$

Хирота назвал уравнение (4.5.3) билинейной формой уравнения Кортевега—де Вриза.

Введем оператор в соответствии с формулой [39, 105]

$$D_x^m D_t^n a b = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n a(x, t) \cdot b(x', t') \Bigg|_{\substack{x' = x \\ t' = t}}, \quad (4.5.4)$$

который будем называть оператором Хироты.

Для оператора (4.5.4) справедливы некоторые полезные соотношения [39, 66], которые могут быть доказаны, используя определение оператора Хироты, посредством несложных преобразований.

Уравнение (4.5.3) можно записать в виде:

$$(D_x D_t + D_x^4) F \cdot F = 0. \quad (4.5.5)$$

Поскольку

$$D_x D_t F F = D_x (F_t F - F F_t) = 2 (F_{xt} F - F_x F_t), \quad (4.5.6)$$

$$D_x^4 F F = 2 (F_{xxxx} F - 4 F_{xxx} F_x + 3 F_{xx}^2),$$

то, подставляя (4.5.6) в (4.5.5), имеем (4.5.3).

Решение уравнения (4.5.5) будем искать в виде следующего формального разложения [1, 39, 105]

$$F(x, t) = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots \quad (4.5.7)$$

Подставляя (4.5.7) в (4.5.5) и группируя члены с одинаковыми степенями ε , получим уравнения:

$$(D_x D_t + D_x^4) 1 \cdot 1 = 0, \quad (4.5.8)$$

$$(D_x D_t + D_x^4) (1 \cdot f_1 + f_1 \cdot 1) = 0, \quad (4.5.9)$$

$$(D_x D_t + D_x^4) (1 \cdot f_2 + f_2 \cdot 1 + f_1 \cdot f_1) = 0, \quad (4.5.10)$$

$$(D_x D_t + D_x^4) (1 \cdot f_3 + f_3 \cdot 1 + f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_1) = 0. \quad (4.5.11)$$

Очевидно, что уравнение (4.5.8) удовлетворяется тождественно, а уравнения (4.5.9)–(4.5.11) после соответствующих преобразований приводятся к следующим [1, 39, 105]:

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} \right) = 0, \quad (4.5.12)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_2 = - (D_x D_t + D_x^4) f_1 \cdot f_1, \quad (4.5.13)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_3 = -2 (D_x D_t + D_x^4) f_1 \cdot f_2. \quad (4.5.14)$$

Из уравнений (4.5.12)–(4.5.14) можно найти решения уравнения Кортевега—де Вриза в виде солитонов.

Очевидно, что решением уравнения (4.5.12) является функция

$$f_1 = \sum_{i=1}^N a_i \exp \{k_i x - \omega_i t\}, \quad \omega_i = k_i^3, \quad (4.5.15)$$

где a_i и k_i — произвольные постоянные.

При $N = 1$ из (4.5.15) имеем $f_1 = a_1 \exp(k_1 x - \omega_1 t)$.

Подставляя последнее выражение в (4.5.13) и используя свойства оператора Хироты, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_2 = 0, \quad (4.5.16)$$

из которого следует, что функцию f_2 в данном случае можно взять равной нулю, при этом члены f_n ряда при $(n \geq 3)$ также равны нулю.

Принимая во внимание (4.5.7), имеем

$$F_1 = 1 + \varepsilon a_1 \exp \{k_1 x - \omega_1 t\}, \quad \omega_1 = k_1^3. \quad (4.5.17)$$

Из формулы после соответствующих преобразований получаем решение

$$u = \frac{1}{2} k_1^2 \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{1}{2} k_1 (x - k_1^2 t) + \varphi_0 \right\}, \quad (4.5.18)$$

где $\varphi_0 = 0, 5 \ln(\varepsilon a_1)$.

При $N = 2$ из (4.5.15) имеем

$$f_1 = a_1 \exp \{k_1 x - \omega_1 t\} + a_2 \exp \{k_2 x - \omega_2 t\}. \quad (4.5.19)$$

Уравнение (4.5.13) в этом случае запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_2 = \\ & = -2a_1 a_2 \left[(k_2 - k_1) (\omega_2 - \omega_1) + (k_2 + k_1)^4 \right] \\ & \exp \{ (k_1 + k_2) x - (\omega_1 + \omega_2) t \}. \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

Последнее уравнение имеет решение в виде

$$f_2 = \exp \{ \theta_1 + \theta_2 + A_{12} \}, \quad (4.5.21)$$

где $\theta_1 = k_1 x - \omega_1 t + \varphi_0^{(1)}$, $\theta_2 = k_2 x - \omega_2 t + \varphi_0^{(2)}$, $\varphi_0^{(i)} = \ln a_i$.

Подставляя (4.5.21) в (4.5.20) находим, что

$$e^{A_{12}} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (4.5.22)$$

Из уравнения (4.5.14) следует, что $f_3 = 0$, и поэтому в этом случае ряд (4.5.7) обрывается при $n \geq 3$.

Принимая во внимание (4.5.7), (4.5.19) и (4.5.21), имеем

$$F_2(x, t) = 1 + \exp \left\{ k_1 x - \omega_1 t + \varphi_0^{(1)} \right\} + \exp \left\{ k_2 x - \omega_2 t + \varphi_0^{(2)} \right\} + \\ + \exp \left\{ (k_1 + k_2) x - (\omega_1 + \omega_2) t + A_{12} + \varphi_0^{(1)} + \varphi_0^{(2)} \right\}. \quad (4.5.23)$$

Подстановка (4.5.23) в формулу (4.5.1) приводит к двухсоли-
тонному решению уравнения Кортевега—де Вриза. Это решение
описывает процесс распространения и взаимодействия двух со-
литонов уравнения Кортевега—де Вриза.

Остановимся на обсуждении характера взаимодействия соли-
тонов, описываемых формулой (4.5.1) и (4.5.23).

Пусть $0 < k_2 < k_1$, тогда при $t \rightarrow +\infty$ в системе координат,
связанной с первым солитоном, имеем

$$\exp \{ \theta_2 \} \rightarrow 0, \quad F = 1 + \exp \{ \theta_1 \}$$

при $\theta \rightarrow -\infty$. Эти зависимости приводят к асимптотическому
решению уравнения Кортевега—де Вриза в виде:

$$u \cong \frac{k_1^2}{2} \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{\theta_1}{2} \right\}. \quad (4.5.24)$$

При $t \rightarrow -\infty$, получаем $\theta_2 \rightarrow \infty$ и $\exp \{ \theta_2 \} \rightarrow \infty$, а из (4.5.23)
находим асимптотику для F

$$F = \exp \{ \theta_2 \} [1 + \exp \{ \theta_1 + A_{12} \}],$$

которая приводит к решению уравнения Кортевега—де Вриза в
виде

$$u = \frac{k_1^2}{2} \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{\theta_1 + A_{12}}{2} \right\}. \quad (4.5.25)$$

Из сравнения (4.5.24) и (4.5.25) следует, что каждый из солитонов после взаимодействия отличается на величину $A_{12}/2$, характеризующую сдвиг фаз. На рис. 4.1. иллюстрируется процесс взаимодействия двух солитонов уравнения Кортевега—де Вриза.

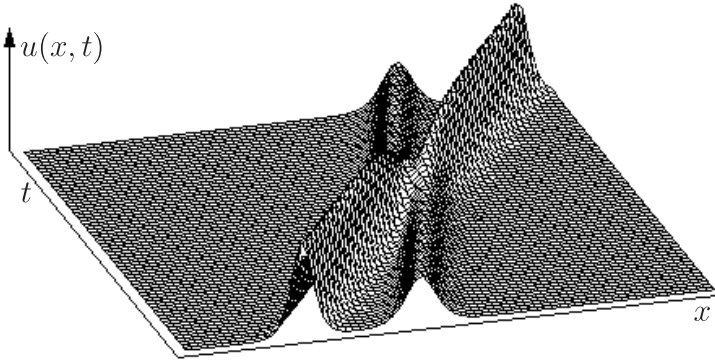


Рис. 4.1. Взаимодействие двух солитонов Кортевега—де Вриза

По аналогии с приведенным выше двухсолитонным решением можно построить трехсолитонное решение уравнения Кортевега—де Вриза. С этой целью для f_1 берется выражение (4.5.15) при $N = 3$:

$$f_1 = \exp \left\{ k_1 x - \omega_1 t + \varphi_0^{(1)} \right\} + \exp \left\{ k_2 x - \omega_2 t + \varphi_0^{(2)} \right\} + \\ + \exp \left\{ k_3 x - \omega_3 t + \varphi_0^{(3)} \right\}, \quad (4.5.26)$$

тогда для f_2 получается решение

$$f_2 = \exp \{ \theta_1 + \theta_2 + A_{12} \} + \exp \{ \theta_1 + \theta_3 + A_{13} \} + \\ + \exp \{ \theta_2 + \theta_3 + A_{23} \}, \quad (4.5.27)$$

где

$$e^{A_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}, \quad \theta_i = k_i x - \omega_i t + \varphi_0^{(i)}, \quad \omega_i = k_i^3. \quad (4.5.28)$$

Решение уравнения (4.5.14) с учетом f_1 и f_2 имеет вид

$$f_3 = \exp \{A_{12} + A_{13} + A_{23} + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3\}, \quad (4.5.29)$$

причем в данном случае равным нулю оказывается f_n при $n \geq 4$.

Подстановка (4.5.26), (4.5.27) и (4.5.29) в (4.5.7) приводит к трехсолитонному решению уравнения Кортевега—де Вриза.

Эта процедура может быть продолжена для произвольного целого N .

4.6. Простейшие решения модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза

Покажем, что решения модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза

$$u_t + 6u^2 u_{xxx} + u_{xxx} = 0 \quad (4.6.1)$$

в переменных бегущей волны

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - C_0 t \quad (4.6.2)$$

выражается через эллиптическую функцию Якоби. Уравнение (4.6.1) в переменных (4.6.2) становится обыкновенным дифференциальным уравнением, которое после интегрирования по z принимает вид:

$$y_{zz} = -2y^3 + C_0 y - C_1, \quad (4.6.3)$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Уравнение (4.6.3) относится к классу уравнений вида (4.2.1) и после умножения на y_z может быть записано в виде:

$$y_z^2 = -y^4 + C_0 y^2 - C_1 y + C_2. \quad (4.6.4)$$

(Постоянная C_1 в (4.6.4) переобозначена.) Пусть α , β , γ и δ — корни уравнения четвертого порядка ($\delta \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha$):

$$y^4 - C_0 y^2 + C_1 y - C_2 = 0. \quad (4.6.5)$$

Тогда, используя новую переменную $q(z)$, параметр m и $y(z)$ в виде

$$y(z) = \frac{\beta (\delta - \alpha) q(z)^2 + \alpha (\beta - \delta)}{(\delta - \alpha) q(z)^2 + \beta - \delta}, \quad (4.6.6)$$

$$m^2 = \frac{(\beta - \gamma) (\alpha - \delta)}{(\alpha - \gamma) (\beta - \delta)}, \quad (4.6.7)$$

уравнение (4.6.4) можно представить как [39]

$$\int \frac{dq}{\sqrt{(1 - q^2) (1 - m^2 q^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{(\beta - \delta) (\alpha - \gamma)} (z - z_0). \quad (4.6.8)$$

Выражение в левой части является эллиптическим интегралом первого рода и поэтому для $q(z)$ получаем решение

$$q(z) = \operatorname{sn} \left(\frac{1}{2} \sqrt{(\beta - \delta) (\alpha - \gamma)} (z - z_0), m \right). \quad (4.6.9)$$

При $C_1 = 0$, $C_0 = k^2$, $C_2 = 0$ корни уравнения (4.6.5) имеют вид: $\alpha \equiv -\delta = k$ и $\beta = \gamma = 0$. Тогда из (4.6.6) получаем

$$y(z) = -\frac{k}{2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{2} k z + \varphi_0 \right) + 1}. \quad (4.6.10)$$

Используя известные тождества для гиперболических функций

$$\operatorname{ch}^2(kz) - \operatorname{sh}^2(kz) = 1, \quad (4.6.11)$$

$$\operatorname{ch}^2(kz) + \operatorname{sh}^2(kz) = \operatorname{ch}(2kz),$$

из (4.6.10) находим решение модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза в форме односолитонного решения

$$u(x, t) = \pm k \operatorname{ch}^{-1}(kx - k^3 t + \chi_0), \quad (4.6.12)$$

где χ_0 — произвольная постоянная. Модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза, как и обычное уравнение Кортевега—де Вриза, также имеет солитонные решения и тоже может быть решено методом обратной задачи рассеяния [1, 60].

4.7. Автономные решения модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза

При неизвестной группе преобразования растяжения, допускаемой нелинейным уравнением в частных производных, его автономное решение можно искать в виде:

$$u(x, t) = C_1 t^m w(z), \quad z = C_2 x t^p, \quad (4.7.1)$$

где C_1 , C_2 , m и p — постоянные, значения которых следует найти. Подставляя (4.7.1) в модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} m C_1 t^{m-1} w + C_1 p t^{m-1} z w_z - 6 C_1^3 C_2 t^{3m+p} w^2 w_z + \\ + C_1 C_2^3 t^{3p+m} w_{zzz} = 0. \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Для того чтобы уравнение (4.7.2) стало обыкновенным дифференциальным уравнением относительно $w(z)$, должны выполняться соотношения

$$2m + p + 1 = 0, \quad 3p + 1 = 0, \quad (4.7.3)$$

откуда получаем

$$p = -\frac{1}{3}, \quad m = -\frac{1}{3}. \quad (4.7.4)$$

В этом случае уравнение (4.7.2) имеет вид:

$$C_1 C_2^3 w_{zzz} = 6C_1^3 C_2 w^2 w_z + \frac{1}{3} C_1 z w_z + \frac{1}{3} C_1 w. \quad (4.7.5)$$

Значения постоянных C_1 и C_2 , вообще говоря, можно выбрать произвольными. Однако из соображений удобства возьмем следующие значения $C_1 = C_2 = 3^{-1/3}$. При этом уравнение (4.7.5) принимает вид

$$w_{zzz} = 6w^2 w_z + z w_z + w. \quad (4.7.6)$$

Интегрируя уравнение (4.7.6) по z , получаем второе уравнение Пенлеве

$$w_{zz} = 2w^3 + zw + \alpha. \quad (4.7.7)$$

Таким образом, автомодельные решения модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза находятся по формулам

$$u(x, t) = \frac{1}{(3t)^{1/3}} w(z), \quad z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}, \quad (4.7.8)$$

где $w(z)$ — решения второго уравнения Пенлеве (4.7.7).

Используя решение (4.7.8), нетрудно восстановить группу преобразований растяжения, которая допускается модифицированным уравнением Кортевега—де Вриза. Соответствующий инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X_3 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.7.9)$$

Очевидно, что модифицированное уравнение Кортевега допускает также операторы сдвига $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ и $X_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ по x и t .

4.8. Решения уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка в переменных бегущей волны

Используя переменные бегущей волны, найдем решения уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка, имеющего вид [128]

$$u_t - 6\beta u u_x + \beta u_{xxx} - 20 u_x u_{xx} - 10 u u_{xxx} + \\ + 30 u^2 u_x + u_{xxxxx} = 0. \quad (4.8.1)$$

Это уравнение относится к классу точно решаемых уравнений, для которого решение задачи Коши может быть получено с помощью метода обратной задачи рассеяния. Однако уравнение (4.8.1) допускает группы преобразований сдвига по x и t , поэтому решения этого уравнения можно искать в переменных бегущей волны.

Будем искать решения в виде

$$u(x, y) = y(z), \quad z = x - C_0 t + \varphi_0, \quad (4.8.2)$$

(где φ_0 — произвольная постоянная), тогда после интегрирования по z из (4.8.1) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению [46, 121]

$$y_{zzzz} - 10y y_{zz} - 5y_z^2 + 10y^3 + \beta(y_{zz} - 3y^3) + \delta y + \mu = 0. \quad (4.8.3)$$

В (4.8.3) $\delta = -C_0$ и μ обозначены как постоянные интегрирования.

Общее решение уравнения (4.8.3) имеет полюса второго порядка, и частные решения (4.8.3) можно искать в виде [39, 94]

$$y(z) = a_0 \operatorname{th}^2(kz) + a_1 \operatorname{th}(kz) + a_2, \quad z = x - C_0 t + \varphi_0. \quad (4.8.4)$$

Уравнение (4.8.3) имеет два класса решений вида (4.8.4).

В первом случае коэффициенты a_0, a_1, a_2, δ и μ определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_0 &= 2k^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \operatorname{const}, \\ \delta &= 6\beta a_2 - 80a_2 k^2 - 30a_2^2 + 104k^4, \\ \mu &= 20a_2^3 - 3\beta a_2^2 + 80a_2^2 k^2 - 64a_2 k^4 - \\ &\quad - 4\beta k^4 + 32k^6 - 8\beta a_2 k^2. \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

Второе семейство решений определяется следующими значениями постоянных

$$\begin{aligned} a_0 &= 6k^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{\beta}{10} - 4k^2, \\ \delta &= \frac{3\beta^2}{10} - 56k^4, \quad \mu = \frac{28}{5}\beta k^4 + 288k^6 - \frac{\beta^3}{100}. \end{aligned} \quad (4.8.6)$$

Из формул (4.8.5) и (4.8.6) следует, что уравнение (4.8.3) имеет частные решения в виде уединенных волн (4.8.4). Уравнение (4.8.3), как и (4.8.1), является точно решаемым уравнением, и поэтому найденные решения являются солитонными решениями. Однако в этой связи можно ожидать, что общее решение уравнения (4.8.3) существует.

Решение уравнения (4.8.3) при $\beta = 0$ впервые было найдено Драхом [98]. Затем оно было переоткрыто Дубровиным и Косгроуве [22, 94].

Найдем решение уравнения (4.8.3) при $\beta \neq 0$. Заметим, что уравнение (4.8.3) не содержит третью производную, и в соответствии с теорией последнего множителя Якоби уравнение имеет последний множитель, равный единице [18, 94]. Поэтому для того, чтобы найти решение уравнения (4.8.3) в квадратурах, требуется найти два первых интеграла.

Один из первых интегралов уравнения находится после умножения (4.8.3) на y_z :

$$y_z y_{zzz} - \frac{1}{2} y_{zz}^2 - 5 y y_z^2 + \frac{5}{2} y^4 + \frac{\beta}{2} (y_z^2 - 2 y^3) + \frac{\delta}{2} y^2 + \mu y = K_1, \quad (4.8.7)$$

где K_1 и далее K_2, K_3 и K_4 — произвольные постоянные.

Второй интеграл найти сложнее. Для этих целей можно использовать полиномы с неопределенными коэффициентами [46].

Суть этого подхода заключается в следующем. На первом шаге предполагается, что в уравнении (4.8.3) $\beta = \delta = \mu = 0$. В этом случае получаем укороченное уравнение в виде

$$y_{zzzz} - 10 y y_{zz} - 5 y_z^2 + 10 y^3 = 0, \quad (4.8.8)$$

которое имеет очевидное рациональное решение

$$y = a_0 / (z - z_0)^2, \quad (4.8.9)$$

где a_0 находится после подстановки (4.8.9) в (4.8.8). Причем $a_0 = 2$ и $a_0 = 6$.

Еще один первый интеграл, соответствующий уравнению (4.8.3), ищем сначала для уравнения (4.8.8). Все слагаемые уравнения (4.8.8) имеют один и тот же порядок полюса в точке $z = z_0$, равный 6. Естественно ожидать, что первый интеграл для уравнения (4.8.8) имеет слагаемые с одинаковым порядком полюса в

точке $z = z_0$. Такой вывод следует из уравнения (4.8.7), поскольку каждое слагаемое в (4.8.7) при $\beta = \delta = \mu = 0$ имеет порядок полюса в точке $z = z_0$, равный 8.

Возьмем полином с неопределенными коэффициентами, каждое слагаемое которого имеет порядок полюса в точке $z = z_0$, равный 12. Такой полином имеет вид:

$$P_{12} = A_0 y_3^2 y_0 + A_1 y_3 y_2 y_1 + A_2 y_3 y_1 y_0^2 + A_3 y_2^3 + A_4 y_2^2 y_0^2 + \\ + A_5 y_2 y_1^2 y_0 + A_6 y_2 y_0^4 + A_7 y_1^4 + A_8 y_1^2 y_0^3 + A_9 y_0^6, \quad (4.8.10)$$

где в (4.8.10) введены обозначения:

$$y_0 = y, \quad y_1 = y_z, \quad y_2 = y_{zz}, \quad y_3 = y_{zzz}. \quad (4.8.11)$$

Пусть $P = K_2$ — первый интеграл уравнения, тогда для уравнения $y_n = E[y]$ этот интеграл удовлетворяет условию

$$\frac{\partial P}{\partial y_0} y_1 + \frac{\partial P}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial P}{\partial y_2} y_3 + \frac{\partial P}{\partial y_3} y_4 = Q[y] E[y], \quad (4.8.12)$$

где $Q[y]$ — множитель в виде полинома. Из (4.8.12) получаем уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial y_0} y_1 + \frac{\partial P}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial P}{\partial y_2} y_3 + E[y] \frac{\partial P}{\partial y_3} = 0. \quad (4.8.13)$$

Уравнение (4.8.13) — основное уравнение, которое позволяет найти первые интегралы уравнения (4.8.3). Подставляя

$$P = \frac{P_{12}}{y_0^k} \quad (k = 0, \dots, 5) \quad (4.8.14)$$

в (4.8.13) и определяя при каждом k значения коэффициентов A_0, \dots, A_9 , находим, что при $k = 0$ все $A_j \equiv 0$ ($j = 0, \dots, 9$) равны

нулю. Однако при $k = 1$ получаем первый интеграл уравнения (4.8.8) в виде:

$$P = y_3^2 - 12y_0y_1y_3 - 4y_0y_2^2 + 2y_1^2y_2 + 20y_0^3y_2 + \\ + 30y_0^2y_1^2 - 24y_0^5 = C_1, \quad (4.8.15)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Каждое из слагаемых (4.8.15) в точке $z = z_0$ имеет полюс десятого порядка. Если к уравнению (4.8.15) прибавить полиномы с неопределенными коэффициентами

$$\beta P_8 + \delta P_6 + \mu P_4, \quad (4.8.16)$$

то на основе (4.8.15) можно найти первый интеграл, соответствующий уравнению (4.8.3).

Выражение (4.8.16) следует добавить к (4.8.15), принимая во внимание размерности параметров β, δ и μ уравнения (4.8.3).

Окончательно еще один первый интеграл уравнения (4.8.3) принимает вид:

$$y_{zzz}^2 - 12yy_zy_{zzz} - 4yy_z^2 + 2y_z^2y_{zz} + 20y^3y_{zz} + \\ + 30y^2y_z^2 - 24y^5 + \beta(y_{zz} - 3y^2)^2 + \\ + \delta(yy_{zz} - y_z^2 - 4y^3) + 2\mu(y_{zz} - 3y^2) = K_2. \quad (4.8.17)$$

Отметим, что первый интеграл (4.8.7) для уравнения (4.8.3) может быть получен так же, как и (4.8.17), если использовать выражение (4.8.14) при $k = 5$.

В первых интегралах (4.8.7) и (4.8.17) введем новые переменные

$$H[y] = y_{zz} - 3y^2 - \frac{\delta}{2}, \quad (4.8.18)$$

$$G[y] = yy_{zz} - \frac{1}{2}y_z^2 - 2y^3 - \frac{\mu}{2}. \quad (4.8.19)$$

Тогда (4.8.7) и (4.8.17) принимают вид

$$\begin{aligned} y_z H_z - \left(y^2 + \frac{\delta}{2} - \beta y \right) H - (\beta + 2y)G - \\ - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}\beta\delta y = K_1, \end{aligned} \quad (4.8.20)$$

$$H_z^2 + \beta H^2 - 4HG + \beta\delta H = K_2. \quad (4.8.21)$$

Пусть $\Phi(t)$ — гиперэллиптическая кривая второго рода

$$\Phi(t) = t^5 + m_0 t^4 + m_1 t^3 + m_2 t^2 + m_3 t + m_4. \quad (4.8.22)$$

Подставляя $G[y]$ из (4.8.21) в (4.8.20) и полагая в полученном уравнении

$$y = \frac{1}{2}(u(z) + v(z) - \beta), \quad (4.8.23)$$

$$H = -\frac{1}{2}u(z)v(z), \quad (4.8.24)$$

$$(u - v)u_z = \sqrt{\Phi(u)}, \quad (4.8.25)$$

$$(u - v)v_z = \sqrt{\Phi(v)}, \quad (4.8.26)$$

из первых интегралов (4.8.20) и (4.8.21) находим, что $\Phi(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = t^5 - 3\beta t^4 + (3\beta^2 + 2\delta)t^3 - 4\mu t^2 + \\ + 2(\beta^2\delta + 4K_1)t + 4K_2. \end{aligned} \quad (4.8.27)$$

Из уравнений (4.8.25) и (4.8.26) получаем [19]

$$\int_{\infty}^{u(z)} \frac{dt}{\sqrt{\Phi(t)}} + \int_{\infty}^{v(z)} \frac{dt}{\sqrt{\Phi(t)}} = K_3, \quad (4.8.28)$$

$$\int_{\infty}^{u(z)} \frac{tdt}{\sqrt{\Phi(t)}} + \int_{\infty}^{v(z)} \frac{tdt}{\sqrt{\Phi(t)}} = z + K_4. \quad (4.8.29)$$

Система (4.8.28), (4.8.29) совпадает с системой, которая возникает в теории обращения интегралов Якоби [19, 22, 94]. Решение уравнения (4.8.3), полученное из (4.8.28), (4.8.29), аналогично решению, полученному С.В. Ковалевской при описании движения твердого тела около неподвижной точки [9, 10, 18]. Это решение является мероморфной функцией, явно выражается через тэта-функцию Римана и строится по Римановой поверхности (4.8.27).

4.9. Уединенные волны, описываемые нелинейным уравнением Шредингера и групповой солитон

Найдем простейшие решения нелинейного уравнения Шредингера [72]

$$i \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \gamma a |a|^2. \quad (4.9.1)$$

Решение уравнения (4.9.1) будем искать в виде произведения двух функций

$$a = e^{ipx - i\chi t} V(z), \quad z = x - c_0 t, \quad (4.9.2)$$

где p , χ и c_0 — постоянные, а $V(z)$ — функция, которую требуется найти.

Подставляя (4.9.2) в (4.9.1), получаем

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + i(2p + c_0) \frac{dV}{dz} - (\chi + p^2) V + \gamma V^3 = 0. \quad (4.9.3)$$

Полагая

$$2p + c_0 = 0, \quad \chi + p^2 = \alpha, \quad (4.9.4)$$

из (4.9.3) получаем уравнение

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \alpha V - \gamma V^3, \quad (4.9.5)$$

решение которого выражается через эллиптическую функцию Якоби, поскольку его можно представить в виде

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = A + \alpha V^2 - \frac{\gamma}{2}V^4. \quad (4.9.6)$$

В предельном случае при $A = 0$ и при условии, что $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$, из (4.9.6) имеем уединенную волну

$$V(z) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}} \operatorname{ch}^{-1} \{ \sqrt{\alpha} (x - c_0 t) \}. \quad (4.9.7)$$

Это решение вместе с (4.9.2) и (4.9.4) приводит к решению нелинейного уравнения Шредингера в виде

$$a(x, t) = e^{i(px - \chi t)} \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}} \operatorname{ch}^{-1} \{ \sqrt{\alpha} (x - c_0 t) \}, \quad (4.9.8)$$

где

$$p = -\frac{c_0}{2}, \quad \chi = \alpha - \frac{c_0^2}{4}.$$

На рис. 4.2. представлено решение $a(x, t)$ при $c_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 4$.

В 1971 году В.Е. Захаров и А.Б. Шабат показали, что нелинейное уравнение (4.9.1) имеет также решения в виде солитонов [20, 24]. Более того, тогда же авторы установили, что это уравнение, как и уравнение Кортевега—де Вриза, может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния. Солитоны (4.9.8) нелинейного уравнения Шредингера (4.9.1) отличаются от обсуждаемых выше солитонов Кортевега—де Вриза тем, что первые имеют форму огибающей группы волн. Внешне они напоминают модулированные радиоволны. Эти солитоны называются *групповыми солитонами*, а иногда *солитонами огибающей*

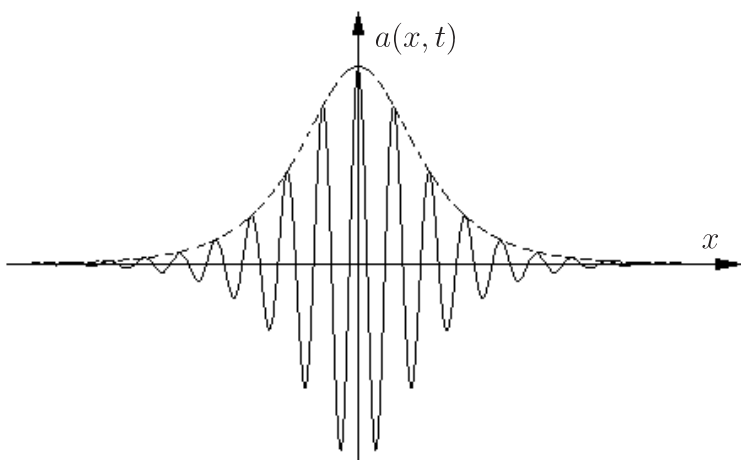


Рис. 4.2. Уединенная волна (групповой солитон), описываемая нелинейным уравнением Шредингера

[57, 70]. Волны под огибающей двигаются со своей скоростью, отличной от групповой скорости.

Обычно под огибающей солитона находится от 14 до 20 волн, причем средняя волна — самая высокая. С этим связан хорошо известный факт, состоящий в том, что самая высокая волна в группе на воде находится между седьмой и десятой (девятый вал). Если в группе образовалось большее количество волн, то с течением времени произойдет ее распад на несколько групп.

Групповые солитоны, которые описываются нелинейным уравнением Шредингера, находят разнообразное применение в нелинейной оптике, поскольку они могут использоваться при передаче информации в волоконно — оптических линиях связи. Это одно из перспективных направлений возможного применения солитонов.

4.10. Простейшие решения уравнения sin-Гордона и топологический солитон

Найдем решения уравнения sin-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin(u) \quad (4.10.1)$$

в переменных бегущей волны [72]

$$u(x, t) = U(\theta), \quad \theta = x - c_0 t,$$

где c_0 — скорость волны. Уравнение (4.10.1) в этих переменных запишется в виде

$$(c_0^2 - 1) U_{\theta\theta} + \sin U = 0. \quad (4.10.2)$$

Умножая (4.10.2) на U_θ и интегрируя один раз по θ , приходим к уравнению [72]

$$(c_0^2 - 1) U_\theta^2 + 4 \sin^2 \frac{U}{2} = 2A, \quad (4.10.3)$$

где A — постоянная интегрирования.

Пусть $c_0^2 > 1$ и $0 < A < 2$, тогда из (4.10.3) приходим к равенству

$$\int_{\sin \frac{A}{2}}^{\sin \frac{U}{2}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \sqrt{\frac{A}{2(c_0^2 - 1)}} (\theta - \theta_0), \quad (4.10.4)$$

где $k^2 = \frac{2}{A}$.

Выражение в левой части в (4.10.4) является эллиптическим интегралом. Решение уравнения (4.10.2) в этом случае является периодической и осциллирующей функцией вблизи $U = 0$ в интервале

$$-2 \arcsin \sqrt{\frac{A}{2}} < U < 2 \arcsin \sqrt{\frac{A}{2}}.$$

При $c_0^2 > 1$ и $A > 2$ решение уравнения

$$U_\theta = \pm \left[\frac{2}{c_0^2 - 1} \left(A - 2 \sin^2 \frac{U}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.10.5)$$

дает спиральные волны.

В случае $c_0^2 - 1 < 0$ и $0 < A < 2$ решение уравнения (4.10.3) является периодической волной в интервале

$$\pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{A}{2}} < U < \pi + 2 \arcsin \sqrt{\frac{A}{2}}.$$

При $c_0^2 < 1$ и при $A < 0$ уравнение (4.10.3) принимает вид

$$U_\theta = \pm \left[\frac{2}{1 - c_0^2} \left(|A| + 2 \sin^2 \frac{U}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.10.6)$$

и имеет решения также в виде спиральных волн при монотонном возрастании или убывании $U(\theta)$.

В предельном случае при $A = 0$ и $c_0^2 < 1$ решения уравнения (4.10.3) выражаются формулой

$$\operatorname{tg} \left(\frac{U}{4} \right) = \pm \exp \left[\pm \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{1 - c_0^2}} \right] \quad (4.10.7)$$

и соответствуют двум уединенным волнам.

Если в (4.10.7) взять положительные знаки, то решение плавно изменяется от $V = 0$ при $\theta \rightarrow -\infty$ до $V = 2\pi$ при $\theta \rightarrow +\infty$.

При другом предельном случае, когда $A = 2$ и $c_0^2 > 1$, решение уравнения (4.10.3) выражается формулой

$$\operatorname{tg} \left(\frac{U + \pi}{4} \right) = \pm \exp \left[\pm \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{c_0^2 - 1}} \right] \quad (4.10.8)$$

и описывает ударно-волновой переход, заключенный между $-\pi$ и π .

Мы уже обсуждали солитоны, которые являлись решениями уравнений Кортевега—де Вриза и нелинейного уравнения Шредингера. Однако не менее популярными, чем перечисленные выше виды солитонов, являются *топологические солитоны*, которые выражаются формулами (4.10.7) и (4.10.8) и являются решениями уравнения sin-Гордона.

Из (4.10.7) получаем решение

$$\varphi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \pm \exp \left(\pm \frac{x - c_0 t + \varphi_0}{\sqrt{1 - c_0^2}} \right) \right\}, \quad (4.10.9)$$

где φ_0 — произвольная постоянная. Это решение часто называется *кинком*, если в формуле (4.10.9) берется положительный знак. При выборе отрицательного знака в (4.10.9) решение становится *антикинком*. На рис. 4.3 иллюстрируется взаимодействие кинка и антикинка.

Кинк и антикинк являются примерами топологических солитонов, поскольку производная φ_x имеет форму уединенной волны.

Уравнение sin-Гордона имеет сохраняющуюся величину

$$E_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x dx,$$

принимаящую целочисленные значения, и поэтому этот закон сохранения называется *топологическим зарядом* решения $\varphi(x, t)$. В частности, топологический заряд кинка равен 1, антикинка -1 . Топологические солитоны при взаимодействии ведут себя как частица и античастица, приводя к состоянию нулевого заряда.

Топологические солитоны имеют также свою замечательную историю и чрезвычайно обширную область применения. Еще в

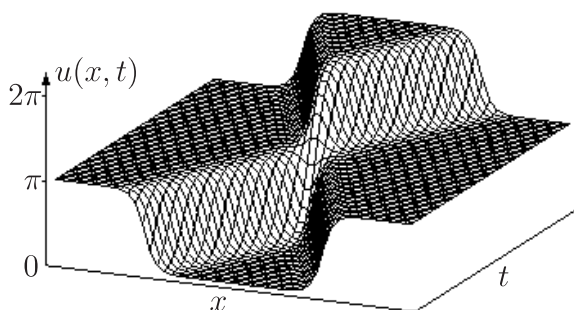


Рис. 4.3. Взаимодействие топологических солитонов (кинка и антикинка), описываемых уравнением sin-Гордона

1880 году А. Бэклунд показал, что уравнение sin-Гордона имеет специальные преобразования (теперь они называются *преобразованиями Бэклунда*), позволяющие последовательно находить аналитические решения этого уравнения. Аналогичное уравнение, как было сказано выше, использовали Я.И. Френкель и Т.А. Конторова при описании дислокаций в кристалле [71].

В 1962 году английские физики Дж. Перринг и Т. Скирма [141] выполнили численные расчеты процесса распространения уединенных волн описываемых уравнением sin-Гордона, с целью проанализировать характер взаимодействия элементарных частиц. Согласно расчетам, выполненным на ЭВМ, уединенные волны, являющиеся решениями уравнения sin-Гордона, не изменяли своих свойств после взаимодействия. По существу, Перринг и Скирма обнаружили солитонные свойства уединенных волн, описываемых уравнением sin-Гордона. Однако в отличие от Крускала и Забуски, Перринг и Скирма не ввели понятие солитона.

4.11. Метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши для уравнения sin-Гордона

Рассмотрим решение задачи Коши для уравнения sin-Гордона. Постановка задачи является следующей: найти решение уравнения sin-Гордона [75, 76, 77]

$$u_{xt} = \sin u \quad (4.11.1)$$

при начальном условии

$$u(x, t = 0) = \varphi(x), \quad (4.11.2)$$

которое удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_x| dx < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) \rightarrow k\pi \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (4.11.3)$$

Пара Лакса для уравнения sin-Гордона состоит из четырех уравнений [59]

$$\begin{aligned} \phi_{1,x} &= i\lambda \phi_1 + \frac{i u_x}{2} \phi_2, \\ \phi_{2,x} &= \frac{i u_x}{2} \phi_1 - i\lambda \phi_2, \end{aligned} \quad (4.11.4)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1,t} &= \frac{1}{4i\lambda} (\phi_1 \cos u - i \phi_2 \sin u), \\ \phi_{2,t} &= \frac{1}{4i\lambda} (i \phi_1 \sin u - i \phi_2 \cos u). \end{aligned} \quad (4.11.5)$$

Используя условие совместности

$$(\phi_{1,x})_t = (\phi_{1,t})_x, \quad (\phi_{2,t})_x = (\phi_{2,x})_t \quad (4.11.6)$$

и учитывая уравнения (4.11.4) и (4.11.5), приходим к уравнению sin-Гордона (4.11.1).

Полагая $u_x = 0$ в системе уравнений (4.11.4), получаем уравнения для асимптотик функций $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ при $x \rightarrow \mp\infty$ в виде

$$\phi_{1,x} = i\lambda \phi_1 \quad \phi_{2,x} = -i\lambda \phi_2. \quad (4.11.7)$$

Откуда имеем

$$\phi_1 = C_1 \exp(i\lambda x), \quad \phi_2 = C_2 \exp(-i\lambda x). \quad (4.11.8)$$

Полагая при $x \rightarrow -\infty$

$$\phi_1 \simeq 0, \quad \phi_2 \simeq \exp(-i\lambda x) \quad (4.11.9)$$

получаем асимптотики после рассеяния на потенциале в виде:

$$\phi_1 \simeq b(x, t) \exp(i\lambda x), \quad \phi_2 \simeq a(x, t) \exp(-i\lambda x). \quad (4.11.10)$$

Для амплитуд рассеяния справедлива следующая теорема, которую примем без доказательства.

Теорема 4.2. *Для амплитуд рассеяния волновых функций справедливы следующие свойства: 1) $a(\lambda)$ является аналитической функцией при $\text{Im}\lambda > 0$, $a^*(\lambda)$ аналитична при $\text{Im}\lambda < 0$; 2) дискретный спектр $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, лежащий в верхней полуплоскости $\text{Im}\lambda > 0$, такой, что $a(\lambda_k) = 0$ ($n = 1, \dots, N$), имеет конечное число точек. Кроме того, выполняются соотношения:*

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad \lambda \in R, \quad (4.11.11)$$

$$a(\lambda, t) = a(\lambda), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda) \exp\left(-\frac{it}{2\lambda}\right). \quad (4.11.12)$$

Уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко при решении уравнения \sin -Гордона записывается в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} K_1(x, y, t) + \int_x^\infty K_2(x, \xi, t) F(\xi + y, t) d\xi &= 0 \\ K_2(x, y, t) + \int_x^\infty K_1(x, \xi, t) F^*(\xi + y, t) d\xi &= F^*(x + y, t). \end{aligned}$$

Здесь функция $F(z, t)$, содержащая данные рассеяния, имеет вид

$$F(z, t) = \sum_{j=1}^N \beta_j \exp\left(\frac{it}{2\lambda_j}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) \exp\{i\lambda z\} d\lambda.$$

Коэффициент отражения для функции $F(z, t)$ и ядро уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко определяются формулами

$$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda)}, \quad \beta_j = \frac{b_j}{i a'(\lambda_j)}, \quad a'(\lambda_j) = \frac{da}{d\lambda_j}. \quad (4.11.13)$$

Решение задачи Коши для уравнения sin-Гордона находится в соответствии с формулой

$$u(x, t) = -2 K_2(x, x, t). \quad (4.11.14)$$

Для безотражательного потенциала $b(\lambda, t) \equiv 0$ и, следовательно, $r(\lambda, t) \equiv 0$, решение уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко сводится к решению системы алгебраических уравнений с элементами матрицы, имеющими вид:

$$A_{kj}(x, t) = \frac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j x - \frac{it}{\lambda_j}\right) \quad (4.11.15)$$

$$(k, j = 1, 2, \dots, N).$$

Для этого случая N -солитонные решения уравнения sin-Гордона находятся по формуле:

$$u(x, t) = -\frac{i}{2} \ln \frac{\det(I + A(x, t))}{\det(I - A(x, t))}. \quad (4.11.16)$$

Здесь I — единичная матрица $N \times N$, матрица $A(x, t)$ с элементами (4.11.15).

Глава 5

Методы построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений

5.1. Метод укороченного разложения для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений

Основные достижения метода Вайса, Табора и Карневейля [150] связаны с введением укороченных разложений. Решение нелинейного уравнения в частных производных

$$E(u, u_x, u_t, \dots, x, t) = 0 \quad (5.1.1)$$

в соответствии с этим методом ищется в виде разложения

$$u = \frac{u_0}{F^p} + \frac{u_1}{F^{p-1}} + \dots + u_p, \quad (5.1.2)$$

где $F = F(x, t)$ — новая функция, коэффициенты u_j зависят от производных $u_j \equiv u_j(F_x, F_t, \dots)$. Показатель степени p в разложении (5.1.2) находится из сравнения ведущих членов уравнения (5.1.1) после подстановки в них первого слагаемого правой части (5.1.2).

Подстановка (5.1.2) в исходное уравнение (5.1.1) и приравнение нулю выражений при одинаковых степенях функции $F(x, t)$ приводит к переопределенной системе уравнений, анализ которой позволяет найти точные решения системы относительно неизвестной функции $F(x, t)$. Подставляя полученное выражение для $F(x, t)$ в (5.1.2), мы находим точные решения исходного уравнения.

Для точно решаемых уравнений методом Вайса—Табора—Карневейля найдены пары Лакса, преобразования Бэклунда и установлены многие другие важные свойства дифференциальных уравнений [39, 92, 93, 115, 116, 118, 119], что было продемонстрировано в третьем разделе. Применение метода для неинтегрируемых уравнений в частных производных позволяет найти некоторые классы точных решений в виде уединенных и периодических волн [39, 41, 45, 113, 120], что будет показано в этом разделе.

5.1.1. Точные решения уравнения Шарма—Тассо—Олвера

В качестве первого примера применения метода Вайса—Табора—Карневейля найдем точные решения уравнения Шарма—Тассо—Олвера

$$u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2} (u^2)_{xx} + (u^3)_x = 0. \quad (5.1.3)$$

Подставляя

$$u = u_0 F^p, \quad F = F(x, t) \quad (5.1.4)$$

в каждый член уравнения (5.1.3), получаем следующие наименьшие степени мономов

$$p - 1; \quad p - 3; \quad 2p - 2; \quad 3p - 1. \quad (5.1.5)$$

Сравнивая их, находим, что наименьший показатель степени в разложении (5.1.2) равен $p = -1$, и поэтому решение уравнения (5.1.3) можно искать в виде

$$u(x, t) = \frac{u_0}{F} + u_1(x, t). \quad (5.1.6)$$

Подставляя (5.1.6) при $u_1(x, t) = 0$ в уравнение (5.1.3), получаем: $u_0 = F_x$. Кроме того, имеем соотношение

$$u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2} (u^2)_{xx} + (u^3)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_t + F_{xxx}}{F} \right). \quad (5.1.7)$$

Из последнего выражения следует, что решение уравнения (5.1.3) можно найти по формуле

$$u(x, t) = \frac{F_x}{F}, \quad (5.1.8)$$

если воспользоваться решениями линейного уравнения третьего порядка

$$F_t + F_{xxx} = 0. \quad (5.1.9)$$

В частности решениями уравнения (5.1.9) является сумма экспоненциальных функций

$$F(x, t) = \sum_{j=0}^N a_j \exp \{k_j x - k_j^3 t\}. \quad (5.1.10)$$

Подставляя (5.1.10) в формулу (5.1.8), получаем решение уравнения (5.1.3) в виде

$$u(x, t) = \frac{\sum_{j=0}^N a_j k_j \exp \{k_j x - k_j^3 t\}}{\sum_{j=0}^N a_j \exp \{k_j x - k_j^3 t\}}. \quad (5.1.11)$$

По формуле (5.1.8) можно найти и другие решения уравнения Шарма—Тассо—Олвера, используя решения линейного уравнения третьего порядка, в том числе рациональные и автомодельные решения.

5.1.2. Точные решения уравнения Бюргерса—Хаксли

В качестве второго примера применения метода укороченных разложений, найдем точные решения уравнения Бюргерса—Хаксли [23]:

$$u_t + 4u u_x = u_{xx} - \beta u - g u^2 + 2u^3. \quad (5.1.12)$$

Преобразование Вайса—Табора—Карневейля (5.1.2) для решений уравнения (5.1.12), находится аналогично предыдущему примеру. Подставляя выражение

$$u(x, t) = u_0 F^p \quad (5.1.13)$$

в каждый член уравнения (5.1.12) [1, 39] и сравнивая наименьшие степени функции F мономов, находим члены, дающие наименьшую степень разложения (5.1.2).

Выбирая члены с наименьшими степенями, получаем укороченное уравнение, состоящее из ведущих членов уравнения (5.1.12)

$$4u u_x = u_{xx} + 2u^3. \quad (5.1.14)$$

Подставляя (5.1.13) в уравнение (5.1.14), приходим к уравнению для определения p в виде:

$$4u_0^2 F^{2p-1} = p(p-1) u_0 F^{p-2} + 2u_0^3 F^{3p}. \quad (5.1.15)$$

Из уравнения (5.1.15) находим $p = -1$, и поэтому для поиска точных решений уравнения (5.1.12) используем преобразование

$$u = \frac{u_0(x, t)}{F(x, t)} + u_1(x, t). \quad (5.1.16)$$

Подставляя (5.1.16) в (5.1.12) и приравнявая нулю выражения при наименьших степенях $F(x, t)$, получаем

$$u_0 = -F_x. \quad (5.1.17)$$

Далее полагаем $u_1 = 0$, тогда преобразование (5.1.16) приводится к преобразованию Коула—Хопфа [91, 101]

$$u = -\frac{\partial \ln F}{\partial x}. \quad (5.1.18)$$

Подставляя (5.1.18) в (5.1.12), имеем

$$(F_{xxx} - F_{xt} - \beta F_x) F^3 + (F_t + F_{xx} + gF_x) F^2 = 0. \quad (5.1.19)$$

Приравняв нулю выражения при разных степенях F , из (5.1.19) получаем переопределенную систему уравнений относительно $F(x, t)$:

$$F_{xxx} - F_{xt} - \beta F_x = 0, \quad (5.1.20)$$

$$F_t + F_{xx} + gF_x = 0. \quad (5.1.21)$$

Выразив F_t из (5.1.21) и подставив в (5.1.20), получим систему:

$$2F_{xxx} + gF_{xx} - \beta F_x = 0, \quad (5.1.22)$$

$$F_t = -F_{xx} - gF_x. \quad (5.1.23)$$

Функция $F(x, t)$, удовлетворяющая системе уравнений (5.1.22), (5.1.23), позволяет по формуле (5.1.18) получить решения уравнения (5.1.12).

Найдем решения уравнения (5.1.12) в зависимости от параметров уравнения β и g .

Пусть $\beta = g = 0$, тогда из (5.1.22) имеем

$$F(x, t) = C_1(t)x^2 + C_2(t)x + C_3(t). \quad (5.1.24)$$

Подставив (5.1.24) в (5.1.23), получим

$$C_{1,t}x^2 + C_{2,t}x + C_{3,t} = -2C_1, \quad (5.1.25)$$

откуда приходим к системе уравнений первого порядка для определения $C_1(t)$, $C_2(t)$ и $C_3(t)$:

$$C_{1,t} = 0, \quad C_{2,t} = 0, \quad C_{3,t} = -2 C_1. \quad (5.1.26)$$

Из (5.1.26) находим зависимости $C_1(t)$, $C_2(t)$ и $C_3(t)$ в виде:

$$C_1(t) = c_1, \quad C_2(t) = c_2, \quad C_3(t) = c_3 - 2 c_1 t, \quad (5.1.27)$$

здесь и далее: c_1 , c_2 и c_3 — произвольные постоянные.

Подставив (5.1.27) в (5.1.24), имеем решение для $F(x, t)$ в виде

$$F_1(x, t) = c_1 x^2 + c_2 x - 2 c_1 t + c_3. \quad (5.1.28)$$

Решение уравнения (5.1.12) принимает вид:

$$u(x, t) = -\frac{(2 c_1 x + c_2)}{c_1 x^2 + c_2 x - 2 c_1 t + c_3}. \quad (5.1.29)$$

Пусть $\beta = 0$, $g \neq 0$. В этом случае решение $F(x, t)$ системы (5.1.22), (5.1.23) выражается формулой

$$F_2(x, t) = c_1 + c_2 x - c_2 g t + c_3 \exp\left(\frac{g^2 t}{4} - \frac{g x}{2}\right). \quad (5.1.30)$$

Подставив (5.1.30) в (5.1.18), получим решение уравнения (5.1.12) при $\beta = 0$

$$u(x, t) = \frac{\frac{1}{2} c_3 g e^{1/4 g^2 t - 1/2 g x} - c_2}{c_1 + c_2 x - g c_2 t + c_3 e^{1/4 g^2 t - 1/2 g x}}. \quad (5.1.31)$$

Из равенства нулю знаменателя в (5.1.31) можно найти значения постоянных c_2 и c_3 , при которых решение (5.1.31) имеет особые точки в начальный и последующие моменты времени.

Рассмотрим случай $\beta \neq 0$, $\gamma^2 + 4\beta\delta > 0$. Из уравнения (5.1.22) находим $F(x, t)$ в виде:

$$\begin{aligned} F(x, t) = & C_1(t) + C_2(t) e^{\left(\frac{1}{4} \sqrt{g^2 + 8\beta} - \frac{g}{4}\right)x} + \\ & + C_3(t) e^{\left(-\frac{1}{4} \sqrt{g^2 + 8\beta} - \frac{g}{4}\right)x}, \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

Подставив (5.1.32) в (5.1.23), находим зависимости $C_1(t)$, $C_2(t)$ и $C_3(t)$ от времени

$$C_1 = c_1, \quad C_2(t) = c_2 e^{-\frac{1}{8} \left(g \sqrt{g^2 + 8\beta} + 4\beta - g^2 \right) t}, \quad (5.1.33)$$

$$C_3(t) = c_3 e^{\frac{1}{8} \left(g \sqrt{g^2 + 8\beta} - 4\beta + g^2 \right) t}.$$

Учитывая (5.1.32) и (5.1.33), имеем решение $F(x, t)$ системы уравнений (5.1.22) и (5.1.23) в виде:

$$\begin{aligned} F_3(x, t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{8} \left(g \sqrt{g^2 + 8\beta} + 4\beta - g^2 \right) t} + \left(\frac{1}{4} \sqrt{g^2 + 8\beta} - \frac{g}{4} \right) x + \\ + c_3 e^{\frac{1}{8} \left(g^2 + g \sqrt{g^2 + 8\beta} - 4\beta \right) t} - \left(\frac{g}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{g^2 + 8\beta} \right) x. \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

Используя (5.1.34), по формуле (5.1.18) находим решение уравнения (5.1.12)

$$u = -\frac{\partial \lg F_3(x, t)}{\partial x}. \quad (5.1.35)$$

Рассмотрим случай $\gamma^2 + 8\beta = 0$. Из уравнения (5.1.22) имеем

$$F_4(x, t) = c_1 + \left(c_2 + c_3 x - \frac{1}{2} c_3 g t \right) \exp \left(\frac{3g^2 t}{16} - \frac{gx}{4} \right). \quad (5.1.36)$$

По формуле (5.1.18) находим решение уравнения (5.1.12) в виде

$$u(x, t) = -\frac{\left(c_3 - \frac{1}{4} c_2 - \frac{1}{4} c_3 x + \frac{1}{8} c_3 g t \right) g e^{\frac{3g^2 t}{16} - \frac{gx}{4}}}{c_1 + \left(c_2 + c_3 x - \frac{1}{2} c_3 g t \right) e^{\frac{3g^2 t}{16} - \frac{gx}{4}}}. \quad (5.1.37)$$

Пусть $\gamma^2 + 8\beta < 0$ и $\beta = -\frac{g^2}{8} - \frac{k^2}{8}$, ($k = \sqrt{-8\beta - g^2}$). Тогда

из уравнений (5.1.22) и (5.1.23) имеем решение для $F(x, t)$ в виде

$$F_5(x, t) = c_1 + c_2 \exp \left(\frac{k^2 t}{2} + \frac{3g^2 t}{16} - \frac{gx}{4} \right) \times \\ \times \left[c_2 \sin \left(\frac{kx\sqrt{2}}{2} - \frac{gtk\sqrt{2}}{4} \right) + c_3 \cos \left(\frac{kx\sqrt{2}}{2} - \frac{gtk\sqrt{2}}{4} \right) \right]. \quad (5.1.38)$$

Решение уравнения (5.1.12) в этом случае находится по формуле (5.1.18)

$$u = -\frac{\partial \lg F_5(x, t)}{\partial x}. \quad (5.1.39)$$

Из (5.1.38) следует, что решение $u(x, t)$ является периодической функцией от x . Эволюция начального возмущения от времени показана на рис. 5.1.

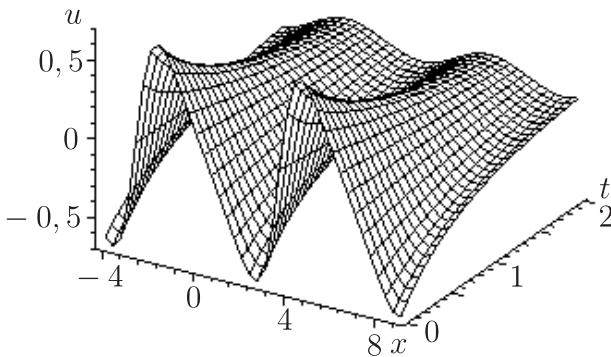


Рис. 5.1. Зависимость от x и t периодического решения уравнения Бюргерса—Хаксли (5.1.12), полученного с учетом функции (5.1.38)

5.1.3. Точные решения уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргера

Применим метод укороченного разложения для построения точных решений уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргера:

$$u_t + u u_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}. \quad (5.1.40)$$

С помощью переменной бегущей волны

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - c_0 t + \varphi_0, \quad (5.1.41)$$

уравнение (5.1.40) после интегрирования по z принимает вид

$$C_1 - C_0 y + \frac{1}{2} y^2 + \beta y_{zz} - \nu y_z = 0. \quad (5.1.42)$$

Общее решение уравнения (5.1.42) существует при

$$C_1 = \frac{1}{2} C_0^2 - \frac{18 \nu^4}{625 \beta^2}$$

и имеет вид [39]:

$$\begin{aligned} y &= C_0 + \frac{6 \nu^2}{25 \beta} + a^3 C_3^2 \exp(-2 a \xi) \\ \wp(C_3 \exp(-a \xi) + C_2, 0 - 1), \end{aligned} \quad (5.1.43)$$

где

$$a = -\frac{(60 \nu^2 \beta^2)^{\frac{1}{3}}}{5 \beta}, \quad \xi = \frac{(60 \nu^2 \beta^2)^{\frac{1}{3}}}{\nu} z, \quad (5.1.44)$$

$\wp(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса.

Будем искать решение уравнения (5.1.40), используя разложение по новым функциям. Укороченное уравнение, состоящее из ведущих членов уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргера, имеет вид

$$u u_x - \beta u_{xxx} = 0. \quad (5.1.45)$$

Подставляя $u = u_0 F^p$ в (5.1.45), находим $p = -2$, и поэтому решение ищем в виде

$$u = \frac{u_0}{F^2} + \frac{u_1}{F} + u_2, \quad F = F(x, t). \quad (5.1.46)$$

Используя формулу (5.1.46), из (5.1.40) после приравнивая нулю выражений при одинаковых степенях $F(x, t)$, получаем переопределенную систему уравнений

$$u_0 = -12 \beta F_x^2, \quad (5.1.47)$$

$$u_1 = 12 \beta F_{xx} - \frac{12}{5} \gamma F_x, \quad (5.1.48)$$

$$u_2 + \frac{F_t}{F_x} + 4 \beta \frac{F_{xxx}}{F_x} - \frac{6 \gamma}{5} \frac{F_{xx}}{F_x} - 3 \beta \frac{F_{xx}^2}{F_x^2} - \frac{\gamma^2}{25 \beta} = 0, \quad (5.1.49)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{5} \frac{F_t}{F_x} - 2 \beta \frac{F_{xt}}{F_x} + \frac{12 \gamma \beta}{5} \frac{F_{xxx}}{F_x} - 3 \beta u_2 \frac{F_{xx}}{F_x} - \beta \frac{F_t F_{xx}}{F_x^2} - \\ & - \frac{3 \gamma^2}{25} \frac{F_{xx}}{F_x} + \frac{6 \gamma \beta}{5} \frac{F_{xx}^2}{F_x^2} - 5 \beta^2 \frac{F_{xxx}}{F_x} + 2 \beta^2 \frac{F_{xxx} F_{xx}}{F_x^2} - \\ & - \beta u_{2,x} + \frac{\gamma}{5} u_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.1.50)$$

$$(u_1)_t + u_1 (u_2)_x + u_2 (u_1)_x + \beta (u_1)_{xxx} - \gamma (u_1)_{xx} = 0, \quad (5.1.51)$$

$$(u_2)_t + u_2 (u_2)_x + \beta (u_2)_{xxx} - \gamma (u_2)_{xx} = 0. \quad (5.1.52)$$

Предопределенная система уравнений (5.1.49)–(5.1.52) является громоздкой и трудной для изучения. Однако можно заметить, что в эту систему уравнений входят только производные функции $F(x, t)$, и поэтому, полагая [41]

$$F(x, t) = 1 + c_1 \exp\{k x - \omega t\}, \quad u_2(x, t) = c_2 \quad (5.1.53)$$

(c_1 и c_2 — произвольные постоянные), от системы дифференциальных уравнений приходим к системе алгебраических уравнений

$$\beta k^3 - \frac{6}{5} k^2 \nu - \frac{\nu^2 k}{25 \beta} + c_2 k - \omega = 0, \quad (5.1.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{18}{5} \beta \nu k^3 - 3 \beta c_2 k^2 + \frac{1}{5} \omega \nu - 3 \beta \omega k + \frac{1}{5} c_2 \nu k - \\ - \frac{3}{25} k^2 \nu^2 - 3 k^4 \beta^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.1.55)$$

$$\begin{aligned} k^4 \beta^2 - \frac{6}{5} k^3 \nu \beta + k^2 c_2 \beta + \frac{1}{5} k^2 \nu^2 - \frac{1}{5} k c_2 \nu - \\ - k \beta \omega + \frac{1}{5} \nu \omega = 0. \end{aligned} \quad (5.1.56)$$

Решив систему алгебраических уравнений (5.1.54)–(5.1.56) относительно k и ω , получаем зависимости k и ω от параметров ν и β :

$$k_{1,2} = \mp \frac{\nu}{5 \beta}, \quad (5.1.57)$$

$$\omega_{1,2} = -\frac{6}{125} \frac{\nu^3}{\beta^2} \mp \frac{\nu c_2}{5 \beta}. \quad (5.1.58)$$

С учетом выражений для коэффициентов u_0 и u_1 решение уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса можно представить формулой

$$\begin{aligned} u(x, t) = C_2 - \frac{12 \nu}{5} \frac{\partial (1 + \exp\{k x - \omega t + \varphi_0\})}{\partial x} + \\ + 12 \beta \frac{\partial^2 (1 + \exp\{k x - \omega t + \varphi_0\})}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (5.1.59)$$

где значения k и ω определяются выражениями (5.1.57) и (5.1.58). Вычислив производные в (5.1.59), решение (5.1.59) можно представить в виде

$$u(x, t) = C_2 + \frac{12 \beta k^2 e^{kx - \omega t + \varphi_0}}{1 + e^{kx - \omega t + \varphi_0}} - \frac{12}{5} \frac{\gamma k e^{kx - \omega t + \varphi_0}}{1 + e^{kx - \omega t + \varphi_0}} - \frac{12 \beta k^2 e^{2kx - 2\omega t + 2\varphi_0}}{(1 + e^{kx - \omega t + \varphi_0})^2}. \quad (5.1.60)$$

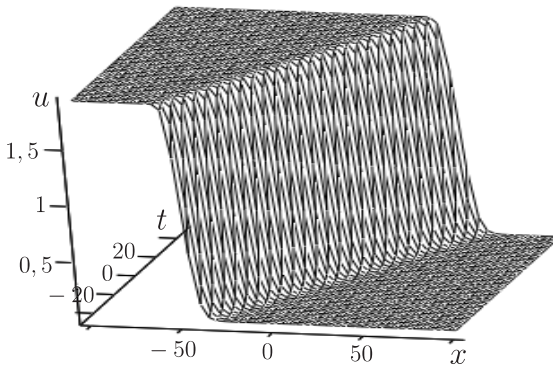


Рис. 5.2. Зависимость от x и t решения (5.1.60) уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса (5.1.40)

Решение (5.1.60) уравнения (5.1.40) представляет собой кинк постоянной амплитуды, распространяющийся по среде с постоянной скоростью. График решения представлен на рис. 5.2.

5.2. Метод экспоненциальной функции для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений

Метод экспоненциальной функции (Exp — fuction method) является следствием метода Вайса—Табора—Карневейля, хотя реально был открыт как самостоятельный метод поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Заметим, что подстановка (5.1.53) в укороченное разложение приводит к логарифмическим производным от функции $F = 1 + \exp\{kz\}$, где $z = x - \omega k^{-1}t + \varphi_0 k^{-1}$. Как следствие этого обстоятельства в решении (5.1.60) появляется функция вида

$$G(x, t) = \frac{e^{kx - \omega t + \varphi_0}}{1 + e^{kx - \omega t + \varphi_0}}. \quad (5.2.1)$$

При этом степень функции $G(x, t)$ в решении (5.1.60) равна порядку полюса общего решения уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса. Дифференцирование функции $G(x, t)$ по t и по x повышает ее степень на единицу и приводит к соотношениям

$$G_t = -\omega G + \omega G^2, \quad (5.2.2)$$

$$G_x = kG - kG^2. \quad (5.2.3)$$

Дифференцируя по x выражение (5.2.3), получаем соотношения для старших производных функции $G(x, t)$:

$$G_{xx} = k^2G - 3k^2G^2 + 2k^2G^3, \quad (5.2.4)$$

$$G_{xxx} = k^3G - 7k^3G^2 + 12k^3G^3 - 6k^3G^4, \quad (5.2.5)$$

$$G_{xxxx} = k^4G - 15k^4G^2 + 50k^4G^3 - 60k^4G^4 + 24k^4G^5. \quad (5.2.6)$$

В связи с этими замечаниями метод укороченного разложения можно корректировать, что и приводит к методу экспоненциальной функции.

Пусть задано нелинейное дифференциальное уравнение, решение которого имеет полюс p -го порядка

$$E(u, u_t, u_x, \dots, x, t) = 0. \quad (5.2.7)$$

Тогда точные решения этого уравнения можно искать в виде разложения по степеням логарифмической производной от функции $F = 1 + \exp \{k x - \omega t + \varphi_0\}$:

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^p A_j G(x, t)^j. \quad (5.2.8)$$

При проведении вычислений следует учесть соотношения (5.2.3), (5.2.4), (5.2.5) и (5.2.6).

5.2.1. Точные решения уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова

Используя метод экспоненциальной функции, найдем точные решения уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова [80]:

$$u_t = \delta u_{xx} + \alpha u - u^2. \quad (5.2.9)$$

Из сравнения ведущих членов уравнения находим, что его решение имеет полюс второго порядка, и поэтому решение можно искать в виде

$$u(x, t) = A_0 + A_1 G(x, t) + A_2 G(x, t)^2. \quad (5.2.10)$$

Подставляя выражение (5.2.10) в уравнение (5.2.9) и приравняв к нулю выражения при одинаковых степенях $G(x, t)$, получаем систему алгебраических уравнений

$$A_2 - 6 \delta k^2 = 0, \quad (5.2.11)$$

$$10 \delta A_2 k^2 + 2 A_1 A_2 - 2 \delta A_1 k^2 + 2 A_2 \omega = 0, \quad (5.2.12)$$

$$2 A_0 A_2 - 2 A_2 \omega + A_1^2 - \alpha A_2 + 3 \delta A_1 k^2 + \\ + A_1 \omega - 4 \delta A_2 k^2 = 0, \quad (5.2.13)$$

$$2 A_0 A_1 - \alpha A_1 - \delta A_1 k^2 - A_1 \omega = 0, \quad (5.2.14)$$

$$9 \delta^2 k^4 - \frac{1}{4} \alpha^2 = 0. \quad (5.2.15)$$

Решив эту систему алгебраических уравнений, получаем значения коэффициентов и параметров разложения решения

$$A_2 = 6 \delta k^2, \quad A_1 = -6 \delta k^2 - \frac{6}{5} \omega, \quad A_0 = \alpha, \quad (5.2.16)$$

$$\omega_{1,2} = \mp 5 \delta k^2, \quad (5.2.17)$$

$$k_{1,2} = \mp \frac{\sqrt{6 \alpha \delta}}{\delta} \quad k_{3,4} = \mp \frac{i \sqrt{6 \alpha \delta}}{\delta}. \quad (5.2.18)$$

Подставляя (5.2.16) и $\omega = \omega_1$ в (5.2.10), получим решение

$$u(x, t) = -3 \delta k^2 + \frac{1}{2} \alpha + 6 \delta k^2 G(x, t)^2. \quad (5.2.19)$$

В случае (5.2.16) и $\omega = \omega_2$ решение принимает вид

$$u(x, t) = 3 \delta k^2 + \frac{1}{2} \alpha - 12 \delta k^2 G(x, t) + 6 \delta k^2 G(x, t)^2, \quad (5.2.20)$$

где функция $G(x, t)$ определяется выражением (5.2.1), а параметр k принимает одно из значений (5.2.18).

Можно заметить, что полученные решения уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова зависят от переменной бегущей волны, поэтому решение этого уравнения можно искать, используя переменную бегущей волны с самого начала.

5.2.2. Точные решения уравнения Гарднера с учетом диссипации

Используя метод экспоненциальной функции, найдем точные решения нелинейного уравнения Гарднера

$$u_t + u u_x + u^2 u_x + \beta u_{xxx} - \gamma u_{xx} = 0. \quad (5.2.21)$$

Уравнение (5.2.21) не относится к классу точно решаемых. Однако имеет некоторые специальные решения. Решение уравнения будем искать, используя переменную бегущей волны

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - c_0 t, \quad (5.2.22)$$

где $y(z)$ удовлетворяет уравнению

$$c_1 - c_0 y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 + \beta y_{zz} - \gamma y_z = 0 \quad (5.2.23)$$

(c_1 — постоянная интегрирования).

Укороченное уравнение, соответствующее уравнению (5.2.23), имеет вид

$$\frac{1}{3} y^3 + \beta y_{zz} = 0. \quad (5.2.24)$$

Из уравнения (5.2.24) видно, что решение имеет полюс первого порядка, поэтому $y(z)$ ищем в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 G(z), \quad (5.2.25)$$

где $G(z)$ имеет вид

$$G(z) = \frac{\exp \{k z\}}{1 + \exp \{k z\}}, \quad (5.2.26)$$

причем $G(z)$ удовлетворяет уравнениям (5.2.3), (5.2.4)

$$\begin{aligned} G_z &= k G - k G^2, \\ G_{zz} &= k^2 G - 3 k^2 G^2 + 2 k^2 G^3. \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

Подставляя (5.2.25) в (5.2.23), получаем уравнение

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{3} A_1^3 - 12 \beta^2 A_1 k^2 \right) G^4 + \\
 & + \left(c_1 - C_0 A_0 + \frac{1}{3} A_0^3 + \frac{1}{2} A_0^2 \right) G + \\
 & + \left(\frac{1}{2} A_1^2 + 18 \beta^2 A_1 k^2 + \nu A_1 k + A_0 A_1^2 \right) G^3 + \\
 & + (A_0 A_1 - C_0 A_1 + A_0^2 A_1 - 6 \beta^2 A_1 k^2 - \nu A_1 k) G^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

Приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях функции $G(z)$, находим выражения для коэффициентов разложения (5.2.25) и параметров уравнения (5.2.23)

$$A_1^{(1,2)} = \mp \beta k, \quad A_0^{(1,2)} = \pm \frac{\nu + 18 \beta^2 k \mp 3 \beta}{6 \beta}, \tag{5.2.29}$$

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{\nu^2 - 9 \beta^2 + 108 \beta^4 k^2}{36 \beta^2}, \\
 c_1 &= - \frac{9 \nu^2 \beta \pm 648 \beta^4 k^2 \nu - 27 \beta^3 \mp 2 \nu^3 + 972 \beta^5 k^2}{648 \beta^3}.
 \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

Точные решения уравнения (5.2.23) с учетом (5.2.30) выражаются формулой

$$y(z) = \pm \frac{\nu \mp 3 \beta + 18 \beta^2 k}{6 \beta} \mp \frac{6 \beta k e^{kz}}{1 + e^{kz}}. \tag{5.2.31}$$

Решения (5.2.31) представляют собой уединенные волны в форме кинков.

5.3. Метод гиперболического тангенса для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений

Дальнейшим развитием метода укороченного разложения Вайса—Табора—Карневейля и метода экспоненциальной функции является метод гиперболического тангенса (\tanh — method), который очень популярен при поиске точных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заметим, что для функции $G(z)$, имеющей вид

$$G(z) = \frac{\exp\{k z\}}{1 + \exp\{k z\}}, \quad (5.3.1)$$

справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (1 + \exp\{k z\}) &= k G(z) = \\ &= \frac{k \exp\{k z\}}{1 + \exp\{k z\}} = \frac{k \exp\{k \theta\}}{1 + \exp\{k \theta\}} - \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = \\ &= \frac{k}{2} + \frac{k}{2} \frac{\exp\{k z\} - 1}{\exp\{k z\} + 1} = \frac{k}{2} \left(1 + \tanh \left\{ \frac{k z}{2} \right\} \right). \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Из (5.3.2) получаем также соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (1 + \exp\{k z\}) = \frac{k^2}{4} \left(1 - \tanh^2 \left\{ \frac{k z}{2} \right\} \right). \quad (5.3.3)$$

С учетом сказанного, решение уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса, полученное в п. 5.1.2, можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= C_2 + 3\beta k^2 \left(1 - \tanh^2 \left\{ \frac{k z}{2} \right\} \right) - \\ &\quad - \frac{6\gamma k}{5} \left(1 + \tanh \left\{ \frac{k z}{2} \right\} \right). \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Подставляя в последнее выражение значение k из (5.1.57) получаем окончательно решение в виде

$$u(x, t) = C_2 + \frac{3\mathfrak{v}^2}{25\beta} \mp \frac{6\mathfrak{v}^2}{25\beta} \mp \frac{6\mathfrak{v}^2}{25\beta} \tanh\left\{\mp \frac{3z}{10}\right\} - \frac{3\mathfrak{v}^2}{25\beta} \tanh^2\left\{\mp \frac{3z}{10}\right\} \quad (5.3.5)$$

или в более удобном виде

$$u(x, t) = C_2 + \frac{6\mathfrak{v}^2}{25\beta} \mp \frac{6\mathfrak{v}^2}{25\beta} - \frac{3\mathfrak{v}^2}{25\beta} \left(1 \mp \tanh\left\{\mp \frac{3z}{10}\right\}\right)^2. \quad (5.3.6)$$

Заметим, что полученная степень гиперболического тангенса совпадает с порядком полюса общего решения уравнения.

Очевидно, что точные решения уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса

$$u_t + u u_x + \beta u_{xxx} - \mathfrak{v} u_{xx} = 0 \quad (5.3.7)$$

можно искать, используя переменные бегущей волны

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - C_0 t, \quad (5.3.8)$$

в виде полинома от гиперболического тангенса

$$y(z) = A_0 + A_1 \tanh\{m z\} + A_2 \tanh^2\{m z\}, \quad (5.3.9)$$

где m — постоянная.

Кратко метод гиперболического тангенса для поиска точных решений можно описать следующим образом.

Пусть задано нелинейное дифференциальное уравнение p -го порядка

$$E(y, y_z, y_{zz}, \dots, z) = 0 \quad (5.3.10)$$

и пусть порядок полюса общего решения уравнения равен n . Тогда решение этого уравнения можно искать в виде разложения по функциям гиперболического тангенса

$$y(z) = \sum_{k=0}^n A_k \tanh^k\{mz\}. \quad (5.3.11)$$

Подставляя решение (5.3.11) в уравнение (5.3.10) и используя соотношение для производных

$$\frac{d}{dz} \left(\tanh^k\{mz\} \right) = m k \tanh^{k-1}\{mz\} (1 - \tanh^2\{mz\}), \quad (5.3.12)$$

получим полином степени $n + p$ от функции гиперболического тангенса. Приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени гиперболического тангенса, приходим к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n, \dots, A_0 , параметра m и параметров математической модели. Решая полученную систему уравнений, находим точные решения в виде (5.3.11).

5.3.1. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка

Рассмотрим применение метода гиперболического тангенса для поиска точных решений нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка

$$u_t + u u_x + \beta u_{xxx} - u_{xxxx} = 0. \quad (5.3.13)$$

В переменных бегущей волны это уравнение принимает вид

$$y_{zzzz} - \beta y_{zz} - \frac{1}{2} y^2 + C_0 y - C_1 = 0. \quad (5.3.14)$$

Полюс общего решения уравнения (5.3.14) равен четырем, поэтому решение этого уравнения будем искать в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 \tanh(kz) + A_2 \tanh^2(kz) + A_3 \tanh^3(kz) + A_4 \tanh^4(kz). \quad (5.3.15)$$

Подставляя (5.3.15) в уравнение (5.3.14) и приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях гиперболического тангенса нулю, получаем значения коэффициентов разложения (5.3.15)

$$A_4 = 1680 k^4, \quad A_3 = 0, \quad A_2 = -\frac{280}{13} k^2 (\beta + 104 k^2), \quad (5.3.16)$$

$$A_1 = 0, \quad A_0 = C_0 - \frac{31}{507} \beta^2 + \frac{560}{39} \beta k^2 + \frac{1568}{3} k^4.$$

Кроме того, получаем уравнение для определения k

$$\frac{179200}{3} k^6 + \frac{31360}{13} \beta k^4 - \frac{8680}{6591} \beta^3 = 0. \quad (5.3.17)$$

Решая полученное уравнение, находим значения k в виде

$$k_{(1,2)} = \pm \frac{\sqrt{13} \beta}{26}, \quad k_{(3,4)} = \pm \frac{1}{260} \sqrt{-2015 \beta + 195 i \beta \sqrt{31}},$$

$$k_{(5,6)} = \pm \frac{1}{260} \sqrt{-2015 \beta - 195 i \beta \sqrt{31}}. \quad (5.3.18)$$

Постоянная C_1 выражается через значения k

$$C_1 = \frac{1}{2} c_0^2 - \frac{543872}{9} k^8 - \frac{14224}{507} \beta^2 k^4 - \frac{313600}{117} \beta k^6 - \\ - \frac{961}{514098} \beta^4 + \frac{17360}{19773} k^2 \beta^3. \quad (5.3.19)$$

Уединенные волны, описываемые уравнением (5.3.13) выражаются формулой

$$y(z) = C_0 - \frac{31}{507} \beta^2 + \frac{560}{39} \beta k^2 + \frac{1568}{3} k^4 - \frac{280}{13} \beta k^2 \tanh^2(kz) - \\ - 2240 k^4 \tanh^2(kz) + 1680 k^4 \tanh^4(kz), \quad (5.3.20)$$

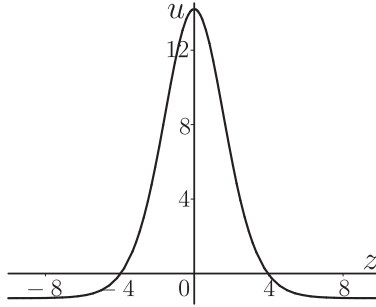


Рис. 5.3. Уединенная волна, описываемая уравнением пятого порядка (5.3.13)

где значения k определяются выражениями (5.3.18). На рис. 5.3 демонстрируется одна из таких волн при $k = k_1$.

5.3.2. Точные решения уравнения Гинзбурга—Ландау

Применим метод гиперболического тангенса для нахождения точных решений уравнения Гинзбурга—Ландау

$$i A_t + p A_{xx} = q |A|^2 A - i \gamma A = 0, \quad (5.3.21)$$

где $p, q \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $p q \gamma \neq 0$.

Известно, что уравнение Гинзбурга—Ландау не имеет точных решений в виде периодических волн [106], однако уравнение имеет набор точных решений в виде уединенных волн. Комплексную функцию в уравнении Гинзбурга—Ландау будем искать в виде

$$A(x, t) = \sqrt{M(z)} \exp \{i(\varphi(z) - \omega t)\}, \quad z = x - C_0 t, \quad (5.3.22)$$

где

$$|A|^2 = M \geq 0, \quad \arg A = \varphi(z) - \omega t, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Подставляя (5.3.22) в исходное уравнение, получаем систему уравнений относительно функций $M(z)$ и $\varphi(z)$ в виде [106]

$$\begin{aligned} \frac{M_{zz}}{2M} - \frac{Mz^2}{4M^2} - \frac{cs_i M_z}{2M} - \left(\varphi_z - \frac{cs_i}{2} \right)^2 + d_r M + g_i = 0, \\ \frac{d}{dz} \left(\varphi_z - \frac{cs_r}{2} \right) + \left(\varphi_z - \frac{cs_r}{2} \right) \left(\frac{M_z}{M} - cs_i \right) + \\ + d_i M - g_r = 0. \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

Шесть параметров системы уравнений (5.3.23) выражаются с помощью следующих соотношений [106]

$$d = d_r + i d_i = \frac{q}{p}, \quad s = s_r - i s_i = \frac{1}{p}, \quad g = g_r + i g_i. \quad (5.3.24)$$

Если ввести обозначение

$$G = \frac{1}{2} M M_{zz} - \frac{1}{4} M_z^2 - \frac{1}{2} cs_i M M_z + d_r M^3 + g_i M^2, \quad (5.3.25)$$

то систему уравнений (5.3.23) можно записать в виде

$$\left(\varphi_z - \frac{cs_r}{2} \right)^2 = \frac{G}{M}, \quad (5.3.26)$$

$$(G_z - 2cs_i G)^2 - 4G M^2 (d_i M - g_r)^2 = 0. \quad (5.3.27)$$

Уравнение относительно функции $M(z)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} M_{zzz} - 2cs_i g_i M + (3d_r M + 2g_i + c^2 s_i^2) M_z - \right. \\ \left. - 2cs_i d_r M^2 - \frac{3}{2} cs_i M_{zz} \right)^2 - 4(d_i M - g_r)^2 \left(\frac{1}{2} M M_{zz} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} M_z^2 - \frac{1}{2} cs_i M M_z + d_r M^3 + g_i M^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

При этом функция $\varphi(z)$ находится из уравнения

$$\varphi_z = \frac{cs_i}{2} + \frac{G_z - 2cs_i G}{2M^2(g_r - d_i M)}. \quad (5.3.29)$$

Решение уравнения (5.3.28) имеет полюс второго порядка, поэтому будем искать решение $M(z)$ в виде

$$M(z) = A_0 + A_1 \tanh \{m z\} + A_2 \tanh^2 \{m z\}. \quad (5.3.30)$$

Подставляя (5.3.30) в уравнение (5.3.28), находим три значения коэффициента A_2

$$A_2^{(1)} = -2 m^2, \quad A_2^{(2)} = 4 m^2, \quad A_2^{(3)} = -4 m^2. \quad (5.3.31)$$

Пусть $A_2 = -2 m^2$, тогда получаем A_1 и A_0 :

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= \frac{1}{5} m c, \\ A_0^{(1)} &= -\frac{1}{6} g_i - \frac{c^2}{200} + \frac{1}{3} g_r + \frac{4}{3} m^2. \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

Кроме того, для g_i получим соотношение

$$g_i^{(1)} = 2 m^2 + \frac{3 c^2}{200}. \quad (5.3.33)$$

Полагая $g_i = g_i^{(1)}$, имеем:

$$g_{r,1}^{(1)} = m^2 - \frac{c^2}{400}, \quad g_{r,2}^{(1)} = -3 m^2 - \frac{21 c^2}{400}. \quad (5.3.34)$$

В случае $g_r = g_{r,1}^{(1)}$ имеем четыре значения m :

$$\begin{aligned} m_1^{(1)} &= \frac{c}{20}, \quad m_2^{(1)} = -\frac{c}{20}, \quad m_3^{(1)} = \frac{i\sqrt{5}c}{20}, \\ m_4^{(1)} &= -\frac{i\sqrt{5}c}{20} \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

и четыре решения для $M(z)$:

$$\begin{aligned}
 M_{1,2}^{(1)}(z) &= -\frac{c^2}{200} \pm \frac{1}{100} c^2 \tanh\left(\pm \frac{c z}{20}\right) - \\
 &\quad - \frac{1}{200} c^2 \tanh^2\left(\pm \frac{c z}{20}\right), \\
 M_{3,4}^{(1)}(z) &= -\frac{c^2}{40} \mp \frac{c^2 \sqrt{5}}{100} \tan\left(\pm \frac{\sqrt{5} c z}{20}\right) - \\
 &\quad - \frac{c^2}{40} \tan^2\left(\pm \frac{\sqrt{5} c z}{20}\right).
 \end{aligned} \tag{5.3.36}$$

При $g_r = g_{r,2}^{(1)}$ решение $M(z)$ принимает вид:

$$M_5^{(1)}(z) = -\frac{c^2}{40} + \frac{c m}{5} \tanh(m z) - 2 m^2 \tanh^2(m z), \tag{5.3.37}$$

где m — произвольная постоянная.

Пусть $A_2^{(2)} = 4 m^2$. В этом случае имеем следующие коэффициенты $A_1^{(2)}$ и $A_0^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 A_1^{(2)} &= \frac{2}{5} m c, \\
 A_0^{(2)} &= \frac{c^2}{100} - \frac{4}{3} g_i + \frac{8}{3} m^2
 \end{aligned} \tag{5.3.38}$$

и соотношение для g_i

$$g_i^{(2)} = -m^2 + \frac{9}{400} c^2. \tag{5.3.39}$$

Полагая $g_i = g_i^{(2)}$, находим значение $m = \mp \frac{c}{20}$ и решение $M(z)$ в виде:

$$\begin{aligned}
 M_{1,2}^{(2)}(z) &= -\frac{c^2}{100} \mp \frac{1}{50} c^2 \tanh\left(\mp \frac{c z}{20}\right) - \\
 &\quad - \frac{c^2}{100} \tanh^2\left(\mp \frac{c z}{20}\right)
 \end{aligned} \tag{5.3.40}$$

при произвольном значении g_r .

Для третьего семейства решений $A_2^{(3)} = -4m^2$ получаем коэффициенты $A_1^{(3)}$ и $A_0^{(3)}$ в виде:

$$A_1^{(3)} = -\frac{2mc}{5}, \quad A_0^{(3)} = \frac{19}{1300}c^2 + \frac{4}{39}g_i - \frac{8}{3}m^2 + \frac{16}{39}g_r. \quad (5.3.41)$$

Для g_i и для g_r имеем соотношения

$$g_i^{(3)} = \frac{13}{2}m^2 + \frac{3}{800}c^2 - \frac{3}{4}g_r, \quad (5.3.42)$$

$$g_{r,1}^{(3)} = \frac{c^2}{200} - 2m^2, \quad g_{r,2}^{(3)} = \frac{3c^2}{200} + 6m^2. \quad (5.3.43)$$

При $g_r = g_{r,1}^{(3)}$ имеем четыре значения m

$$m_{1,2}^{(3)} = \pm \frac{c}{20}, \quad m_{3,4}^{(3)} = \pm \frac{ic\sqrt{2}}{40}, \quad (5.3.44)$$

и четыре решения для $M(z)$:

$$M_{1,2}^{(3)}(z) = \frac{c^2}{100} \mp \frac{c^2}{50} \tanh\left(\pm \frac{cz}{20}\right) + \frac{c^2}{100} \tanh^2\left(\pm \frac{cz}{20}\right), \quad (5.3.45)$$

$$M_{3,4}^{(3)}(z) = \frac{c^2}{50} \pm \frac{c^2\sqrt{2}}{100} \tan\left(\pm \frac{cz\sqrt{2}}{40}\right) + \frac{c^2}{200} \tan^2\left(\pm \frac{cz\sqrt{2}}{40}\right).$$

В случае $g_r = g_{r,2}^{(3)}$ решение принимает вид

$$M_5^{(3)}(z) = \frac{c^2}{50} - \frac{2mc}{5} \tanh(mz) + 4m^2 \tanh^2(mz), \quad (5.3.46)$$

где постоянная t является произвольной.

Таким образом, с помощью метода гиперболического тангенса получены двенадцать решений уравнения Гинзбурга—Ландау при некоторых ограничениях на значения параметров исходного уравнения.

5.4. Метод простейших уравнений для поиска точных решений

Идея метода простейших уравнений состоит в том, чтобы решение исходного уравнения искать, используя не элементарные и специальные функции, а общие решения простейших уравнений. Простейшим уравнением будем называть уравнение с известным общим решением меньшего порядка, чем исходное уравнение. Суть метода состоит в следующем.

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$M_n[y] = M_n(y, y_z, y_{zz}, \dots, z) = 0. \quad (5.4.1)$$

Возьмем уравнение меньшего порядка, решение которого известно

$$E_m[Y] = E_m(Y, Y_z, \dots, z) = 0. \quad (5.4.2)$$

При известных порядках полюсов решений уравнений (5.4.1) и (5.4.2) можно написать зависимость между решениями этих уравнений

$$y = F(Y), \quad (5.4.3)$$

Подставляя (5.4.3) в исходное уравнение, можно получить соотношение

$$M_n[F(Y)] = \hat{R}E_m[Y]. \quad (5.4.4)$$

В этом случае решение $y(z)$ исходного уравнения находится по формуле (5.4.3).

В качестве простейшего уравнения можно использовать уравнение Риккати с постоянными коэффициентами

$$E_m[Y] = Y_z - Y^2 + aY + b = 0. \quad (5.4.5)$$

Заменой переменных

$$Y = -\frac{\Psi_z}{\Psi}, \quad (5.4.6)$$

уравнение (5.4.5) приводится к линейному уравнению второго порядка

$$\psi_{zz} + a\psi_z - b\psi = 0. \quad (5.4.7)$$

Подставляя

$$\psi = \exp\{\lambda z\} \quad (5.4.8)$$

в уравнение (5.4.7), получаем значения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}. \quad (5.4.9)$$

Решение уравнения (5.4.7) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеет вид

$$\psi(z) = C_1 \exp\{\lambda_1 z\} + C_2 \exp\{\lambda_2 z\}. \quad (5.4.10)$$

Решение уравнения (5.4.5) находится после подстановки (5.4.10) в (5.4.6).

Вторым примером простейшего уравнения является уравнение для эллиптической функции Якоби

$$Q_z^2 = Q^4 + aQ^3 + bQ^2 + cQ + d. \quad (5.4.11)$$

Третим примером простейшего уравнения может служить уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса

$$R_z^2 = -4R^3 + aR^2 + bR + c. \quad (5.4.12)$$

Решения уравнений (5.4.11) и (5.4.12) выражаются через эллиптические функции Якоби и Вейерштрасса.

5.4.1. Уединенные волны, описываемые уравнением Курамото—Сивашинского

Рассмотрим применение метода простейших уравнений для поиска точных решений обобщенного уравнения Курамото—Сивашинского [41, 113]

$$u_t + u u_x + u_{xx} + \sigma u_{xxx} + u_{xxx} = 0. \quad (5.4.13)$$

Будем искать решения уравнения, используя переменные бегущей волны

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - C_0 t. \quad (5.4.14)$$

После интегрирования по z уравнение принимает вид

$$y_{zzz} + \sigma y_{zz} + y_z + \frac{1}{2} y^2 - C_0 y + C_1 = 0. \quad (5.4.15)$$

Решение уравнения (5.4.15) ищем в виде разложения по степеням функции $Y(z)$. Показатель степени многочлена определяется аналогично порядку полюса общего решения. Подставляя $y(z) = a_p Y^p$ в уравнение (5.4.15) и последовательно сравнивая показатели степеней мономов друг с другом, имеем $p = 3$, что соответствует укороченному уравнению

$$y_{zzz} + \frac{1}{2} y^2 = 0. \quad (5.4.16)$$

Поскольку порядок полюса общего решения равен трем, то решение исходного уравнения можно искать в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + A_3 Y^3, \quad Y = Y(z). \quad (5.4.17)$$

Пусть $Y(z)$ — решение уравнения Риккати

$$Y_z = -Y^2 + b. \quad (5.4.18)$$

Очевидно, что общее решение уравнения (5.4.18)

$$Y(z) = \sqrt{b} \tanh \{ \sqrt{b}(z + \varphi_0) \} \quad (5.4.19)$$

имеет полюс первого порядка. Дифференцируя уравнение (5.4.18) по z , находим, что решение $Y(z)$ удовлетворяет также уравнениям более высокого порядка

$$Y_{zz} = -2Y(b - Y^2), \quad Y_{zzz} = -6Y^4 + 8Y^2b - 2b^2. \quad (5.4.20)$$

Подставляя (5.4.17) в уравнение (5.4.15) и учитывая уравнения (5.4.20), приходим к полиному шестой степени от $Y(z)$. Приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях $Y(z)$, получаем систему алгебраических уравнений, из которой находим значения коэффициентов A_3 , A_2 , b и A_0 в виде

$$A_3 = 120, \quad A_2 = -15\sigma, \quad b = -\frac{1}{608}\sigma^2 - \frac{1}{120}A_1 + \frac{1}{38}, \quad (5.4.21)$$

$$A_0 = -C_0 - \frac{23}{608}\sigma^3 - \frac{1}{12}A_1\sigma + \frac{27}{76}\sigma. \quad (5.4.22)$$

Кроме того, получаем соотношение

$$\sigma(\sigma - 4)(\sigma + 4)(6\sigma^2 - 19A_1 + 18) = 0. \quad (5.4.23)$$

Из последнего уравнения находим значения σ и A_1 .

Пусть $\sigma = 0$, тогда дополнительно имеем два значения A_1

$$A_1^{(1)} = -\frac{270}{19}, \quad A_1^{(2)} = \frac{90}{19}. \quad (5.4.24)$$

В этом случае получаем два решения уравнения Курамото—Сивашинского при соответствующих значениях b_1 и b_2 уравнения Риккати. Первое решение

$$y_1(z) = -C_0 - \frac{270}{19}Y + 120Y^3 \quad (5.4.25)$$

при условии, что

$$C_1^{(1)} = \frac{4950}{6859} - \frac{1}{2}C_0^2, \quad b_1 = \frac{11}{76}, \quad (5.4.26)$$

и второе решение в виде

$$y_2(z) = -C_0 + \frac{90}{19}Y + 120Y^3 \quad (5.4.27)$$

с учетом соотношений

$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{2}C_0^2 - \frac{450}{6859}, \quad b_2 = -\frac{1}{76}. \quad (5.4.28)$$

Графики точных решений уравнения Курамoto—Сивашинского (уединенная волна и периодические решения) при $\sigma = 0$ представлены на рис. 5.4.

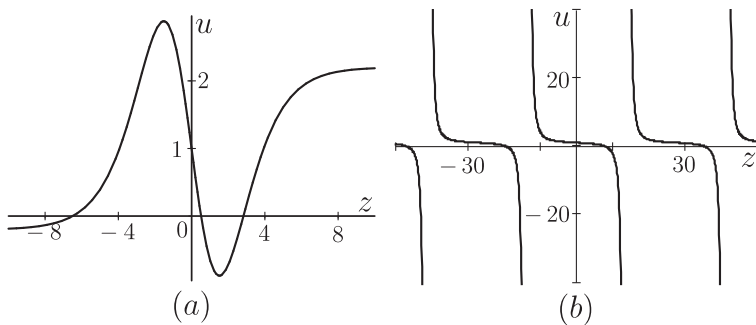


Рис. 5.4. Уединенная волна (a) и сингулярные решения (b), описываемые уравнением Курамoto—Сивашинского при $\sigma = 0$

В случае $\sigma = \pm 4$ получаем четыре решения уравнения Курамoto—Сивашинского с соответствующими значениями параметров $b_{(3,5)}$ и $b_{(4,6)}$:

$$y_{(3,5)}(z) = -C_0 \pm 9 - 30Y \mp 60Y^2 + 120Y^3 \quad (5.4.29)$$

при условии, что

$$C_1^{(3,5)} = 18 - \frac{1}{2}C_0^2, \quad b_{(3,5)} = \frac{1}{4}, \quad (5.4.30)$$

и решение

$$y_{(4,6)}(z) = \mp 11 - C_0 + 30Y \mp 60Y^2 + 120Y^3 \quad (5.4.31)$$

с учетом значений

$$C_1^{(4,6)} = 8 - \frac{1}{2} C_0^2, \quad b_{(4,6)} = -\frac{1}{4}. \quad (5.4.32)$$

Графики решений уравнения Курамoto—Сивашинского при $\sigma = 4$ иллюстрируются на рис. 5.5.

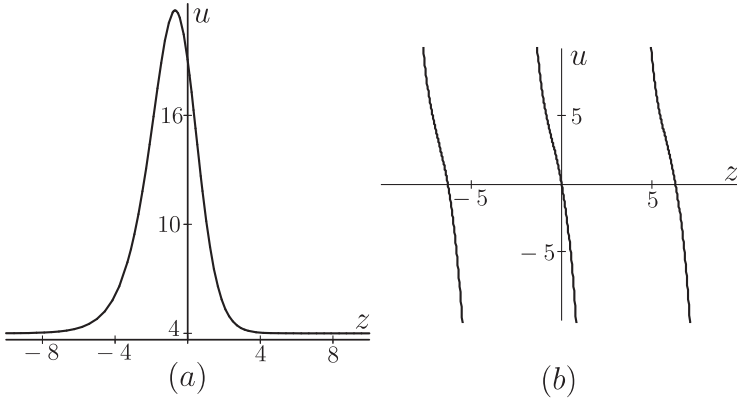


Рис. 5.5. Уединенная волна (a) и сингулярные решения (b), описываемые уравнением Курамoto—Сивашинского при $\sigma = 4$

Используя значение A_1 из уравнения (5.4.23) находим еще четыре значения σ . При $\sigma = \pm \frac{12}{\sqrt{47}}$ получаем решение уравнения Курамoto—Сивашинского в виде (рис. 5.6, а)

$$y_{(7,8)}(z) = -C_0 \pm \frac{45}{2209} \sqrt{47} + \frac{90}{47} Y \mp \frac{180}{47} \sqrt{47} Y^2 + 120 Y^3, \quad (5.4.33)$$

причем параметры C_1 и b уравнений определяются из соотношений

$$C_1^{(7,8)} = \frac{1800}{103823} - \frac{1}{2} C_0^2, \quad b_{(7,8)} = \frac{1}{188}. \quad (5.4.34)$$

При $\sigma = \pm \frac{16}{\sqrt{73}}$ решение исходного уравнения получаем в виде (рис. 5.6, b)

$$y_{(9,10)}(z) = -C_0 + \frac{60}{5329} \sqrt{73} + \frac{150}{73} Y - \frac{240}{73} \sqrt{73} Y^2 + 120 Y^3 \quad (5.4.35)$$

при следующих значениях параметров

$$C_1^{(9,10)} = \frac{4050}{389017} - \frac{1}{2} C_0^2, \quad b_{(9,10)} = \frac{1}{292}. \quad (5.4.36)$$

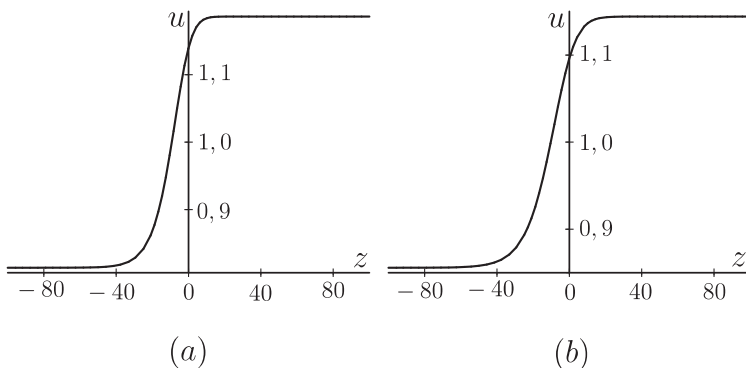


Рис. 5.6. Уединенные волны, описываемые уравнением Курамто—Сивашинского при $\sigma = \frac{12}{\sqrt{47}}$ (a) и $\sigma = \frac{16}{\sqrt{73}}$ (b)

Решение уравнения Рикатти (5.4.18) выражается формулой

$$Y(z) = \sqrt{b_k} \tanh \{ \sqrt{b_k} (z + \varphi_0) \} \quad (k = 1, \dots, 10), \quad (5.4.37)$$

где параметр b_k определится формулами (5.4.26), (5.4.28), (5.4.30), (5.4.32), (5.4.34) и (5.4.36).

Таким образом, решения уравнения Курамто—Сивашинского найдены при следующих значениях параметров:

$$\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} = 0; \quad \pm \frac{12}{\sqrt{47}}; \quad \pm \frac{16}{\sqrt{73}}; \quad \pm 4. \quad (5.4.38)$$

Других решений уравнения Курамото—Сивашинского в виде уединенных волн до настоящего времени не получено.

5.4.2. Периодические волны уравнения Курамото—Сивашинского

Применим метод постейших уравнений, чтобы найти периодические волны, описываемые уравнением Курамото—Сивашинского. Запишем уравнение используя переменную бегущей волны

$$y_{zzz} + \sigma y_{zz} + y_z + \frac{1}{2} y^2 + C_0 y - C_1 = 0. \quad (5.4.39)$$

Пусть функция $R(z)$ является решением уравнения для эллиптической функции Вейерштрасса [113]

$$R_z^2 = -4 R^3 + a R^2 + 2 b R + c. \quad (5.4.40)$$

Поскольку решение $y(z)$ уравнения (5.4.39) имеет полюс третьего порядка, а решение $R(z)$ имеет полюс второго порядка, то решение уравнения (5.4.39) $y(z)$ будем искать в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 R + A_2 R_z. \quad (5.4.41)$$

Функция $R(z)$ удовлетворяет также уравнениям более высокого порядка

$$R_{zz} = -6 R^2 + a R + b, \quad (5.4.42)$$

$$R_{zzz} = -12 R R_z + a R_z, \quad (5.4.43)$$

$$R_{zzzz} = 120 R^3 - 30 a R^2 - 36 b R + a^2 R - 12 c + a b. \quad (5.4.44)$$

Подставляя (5.4.41) в уравнение (5.4.39), и приравнявая к нулю выражения при одинаковых степенях функций R и R_z , получаем значения коэффициентов

$$A_2 = 60, \quad A_1 = 15 \sigma, \quad A_0 = -\frac{5}{4} \sigma a - \frac{1}{4} \sigma - C_0. \quad (5.4.45)$$

Дальнейшие вычисления приводят к следующим значениям параметра σ уравнения (5.4.39) и значениям параметров b и c уравнения (5.4.40):

$$\sigma = \pm 4, \quad b = \frac{1}{24} - \frac{1}{24} a^2, \quad (5.4.46)$$

$$c = \frac{1}{2160} C_0^2 + \frac{1}{1080} C_1 + \frac{1}{432} a^3 - \frac{1}{144} a - \frac{13}{1080}.$$

Таким образом, получаем, что уравнение Курамото—Сивашинского при $\sigma = \pm 4$ имеет решение в виде

$$y(z) = \mp 5a \mp 1 - C_0 \pm 60R + 60R_z, \quad (5.4.47)$$

где $R(z)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} R_z^2 = & -4R^3 + aR^2 + \frac{1-a^2}{12}R + \frac{1}{1080}C_1 + \frac{1}{2160}C_0^2 + \\ & + \frac{1}{432}a^3 - \frac{1}{144}a - \frac{13}{1080}. \end{aligned} \quad (5.4.48)$$

Пусть R_1, R_2 , и R_3 — действительные корни уравнения

$$\begin{aligned} 4R^3 - aR^2 - \frac{1-a^2}{12}R - \frac{1}{1080}C_1 - \frac{1}{2160}C_0^2 - \\ - \frac{1}{432}a^3 + \frac{1}{144}a + \frac{13}{1080} = 0, \end{aligned} \quad (5.4.49)$$

такие, что $R_1 \geq R_2 \geq R_3$, тогда общее решение уравнения (5.4.48) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} R(z) = R_2 + (R_1 - R_2) \operatorname{cn}^2(z\sqrt{R_1 - R_2}, S), \\ S^2 = \frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_3}. \end{aligned} \quad (5.4.50)$$

Периодические решения исходного уравнения существуют только при двух значениях $\sigma = \pm 4$. В работах [107, 109] доказано, что это единственные периодические решения уравнения Курамото—Сивашинского.

5.4.3. Уединенные волны на поверхности жидкости с конвекцией

Уравнение для описания волн с учетом конвекции жидкости [82]

$$u_t + \varepsilon uu_x + \chi (uu_x)_x + \mu u_{xx} + \delta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad (5.4.51)$$

заменой переменных может быть приведено к виду

$$u_t + \beta (uu_x + u_{xxx}) + \alpha u_{xx} + (u u_x + u_{xxx})_x = 0. \quad (5.4.52)$$

где α и β определяются через значения параметров ε , χ , μ , δ и γ .

Используя переменные бегущей волны, из (5.4.52) получаем

$$y_{zzz} + y y_z + \beta y_{zz} + \frac{1}{2} \beta y^2 + \alpha y_z - C_0 y + C_1 = 0. \quad (5.4.53)$$

Задача Коши для уравнения (5.4.53) в общем случае не решается, но при некоторых дополнительных ограничениях на параметры, уравнение имеет набор точных решений [39, 142].

Найдем решения уравнения (5.4.53) в виде уединенных волн. Укороченное уравнение, соответствующее (5.4.53), имеет вид

$$y_{zzz} + y y_z = 0. \quad (5.4.54)$$

Из решения (5.4.54) следует, что решение уравнения (5.4.53) имеет полюс второго порядка, и поэтому решение для уединенных волн будем искать в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2, \quad (5.4.55)$$

где $Y(z)$ является общим решением уравнения Риккати (5.4.18). Подставляя выражение (5.4.55) в уравнение (5.4.53), получим следующие значения коэффициентов

$$A_2 = -12, \quad A_1 = 0, \quad A_0 = 8b - \alpha, \quad (5.4.56)$$

$$C_0 = \beta \alpha, \quad C_1 = -\frac{1}{2} \beta \alpha^2 + 8 \beta b^2. \quad (5.4.57)$$

Решение уравнения (5.4.53) имеет вид

$$y(z) = 8b - \alpha - 12\sqrt{b} \tanh^2(\sqrt{b}z), \quad (5.4.58)$$

где b — произвольная постоянная.

Мы нашли точные решения уравнения (5.4.58) в виде уединенных волн с одной произвольной постоянной b . Это решение удовлетворяет уравнению (5.4.53) в виде

$$\begin{aligned} y_{zzz} + y y_z + \beta y_{zz} + \frac{1}{2} \beta y^2 + \alpha y_z - \alpha \beta y - \\ - \frac{1}{2} \beta \alpha^2 + 8 \beta b^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.4.59)$$

Решения (5.4.58) могут быть использованы при анализе нелинейных волновых процессов, описываемых уравнением (5.4.51).

5.4.4. Периодические волны на поверхности жидкости с конвекцией

Используя метод простейших уравнений, найдем решение уравнения (5.4.52) в виде периодических волн. С этой целью воспользуемся формулой

$$y(z) = A_0 + A_1 Q + A_2 Q^2 + D_1 Q_z + B_1 \frac{Q_z}{Q} + B_2 \frac{Q_z^2}{Q^2}, \quad (5.4.60)$$

где $Q(z)$ — общее решение уравнения

$$Q_z^2 = Q^4 + a Q^3 + b Q^2 + c Q + d. \quad (5.4.61)$$

Подставляя (5.4.60) в (5.4.53), получаем $B_2^{(1)} = -12$, $B_2^{(2)} = 0$.
Рассмотрим первый случай $B_2 = B_2^{(1)} = -12$. Имеем

$$c = 0, \quad B_1 = 0, \quad A_0 = 8b - \alpha, \quad (5.4.62)$$

$$A_1 = 9a, \quad A_0 = 11b - \alpha, \quad C_0 = -\beta \alpha, \quad (5.4.63)$$

$$A_2^{(1)} = 12, \quad A^{(2)} = 0. \quad (5.4.64)$$

Полагая $A_2 = A^{(1)}$, находим

$$a = 0, \quad C_1 = \frac{1}{2} \beta \alpha^2 - 8 \beta b^2 + 24 \beta d. \quad (5.4.65)$$

Решение в виде периодических волн определяются формулой

$$y(z) = -\alpha - 4b - \frac{12d}{Q(z)^2}, \quad (5.4.66)$$

где $Q(z)$ — общее решение уравнения

$$Q_z^2 - Q^4 - bQ^2 - d = 0. \quad (5.4.67)$$

Полагая $B_2 = 0$ в преобразовании (5.4.60), получаем

$$B_1 = 0, \quad A_2 = -6, \quad D_1 = \pm 6 \quad A_1 = 3a, \quad (5.4.68)$$

$$A_0 = -\alpha - b, \quad C_0 = -\beta \alpha, \quad (5.4.69)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \beta \alpha^2 + \frac{3}{2} \beta ac - 6 \beta d - \frac{1}{2} \beta b^2. \quad (5.4.70)$$

Решение в этом случае имеет вид

$$y(z) = -\alpha - b - 3aQ - 6Q^2 + 6Q_z, \quad (5.4.71)$$

где $Q(z)$ удовлетворяет уравнению

$$Q_z^2 - Q^4 - aQ^3 - bQ^2 - cQ - d = 0. \quad (5.4.72)$$

Уравнение (5.4.59) при этом запишется в виде

$$y_{zzz} + \beta y_{zz} + \alpha y_z + \frac{1}{2} \beta y^2 + y y_z + \beta \alpha y(z) + \\ + \frac{1}{2} \beta \alpha^2 + \frac{3}{2} \beta ac - 6 \beta d - \frac{1}{2} \beta b^2 = 0. \quad (5.4.73)$$

Решения (5.4.66) и (5.4.71) уравнения (5.4.53) являются периодическими волнами. Более детальное обсуждение применения метода простейших уравнений можно найти в работе [124].

5.5. Применение многоугольников при построении точных решений

Одной из трудностей применения метода простейших уравнений для построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений является выбор простейшего уравнения. В ряде случаев в качестве простейших уравнений можно взять хорошо известные точно решаемые нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения: уравнение Риккати (5.4.5), уравнение для эллиптической функции Якоби (5.4.11) или уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса (5.4.12). Однако во многих случаях эта трудность становится препятствием применения метода простейших уравнений, в преодолении которой может существенно помочь применение многоугольников, которые часто называют многоугольниками Ньютона [11, 12, 130].

Работа Ньютона по анализу алгебраического уравнения с использованием графической иллюстрации выполнена в 1711 году. Сам Ньютон считал эту работу одной из самых важных. Однако споры о роли самого Ньютона в открытии многоугольника, называемого его именем, не утихают до настоящего времени. По-видимому, это связано с тем, что сам Ньютон при анализе алгебраического уравнения рассмотрел лишь одно ребро ломаной.

Целиком выпуклая ломаная была рассмотрена Пюизе. Работа самого Пюизе не содержала ссылки на Ньютона, и остается неясным ответ на вопрос, был ли знаком Пюизе с работой Ньютона. Возможно, поэтому многие исследователи многоугольник Ньютона часто называют многоугольником Ньютона—Пюизе [3].

Применение многоугольников для решения различных задач исследования нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений основано на установлении соответствия между обыкновенным дифференциальным уравнением и многоугольником на плоскости, который как раз и называется многоугольником Ньютона.

Пусть задано нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение полиномиального вида

$$M_n[y(z), y_z(z), y_{zz}(z), \dots, z] = 0. \quad (5.5.1)$$

Каждому члену (моному) дифференциального уравнения (5.5.1) ставится в соответствие точка на плоскости по следующему правилу [11, 12, 130]

$$C_1 z^{q_1} y^{q_2} \mapsto (q_1, q_2), \quad C_2 \frac{d^k y}{dz^k} \mapsto (-k, 1), \quad (5.5.2)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. При умножении мономов их координаты складываются. Множество точек на плоскости, соответствующее дифференциальному уравнению, образует так называемый носитель. Соединяя все внешние точки носителя, получаем многоугольник Ньютона на плоскости. Таким образом, каждому обыкновенному дифференциальному уравнению (5.5.1) ставится в соответствие многоугольник L_1 на плоскости [11, 12, 127, 128, 129].

Пусть решение $y(z)$ исходного уравнения выражается через решения $Y(z)$ простейшего уравнения

$$y(z) = F(Y(z), Y_z(z), \dots, z). \quad (5.5.3)$$

Подстановка (5.5.3) в уравнение (5.5.1) ведет к новому дифференциальному уравнению, которому также можно поставить в соответствие многоугольник Ньютона на плоскости. Обозначим этот многоугольник L_2 . Анализируя многоугольник L_2 , можно построить многоугольник Ньютона L_3 , соответствующий простейшему уравнению. Пусть ребро $\Gamma_1^{(1)}$ относится к L_2 , ребро $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ к L_3 . Можно доказать, что если $\Gamma_1^{(1)}$ и $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ имеют равные внешние нормальные векторы, то соответствующие асимптотики совпадают вплоть до значения коэффициентов [11, 12]. Под внешним нормальным вектором мы имеем в виду вектор, который направлен вне многоугольника. Следовательно, пригодный многоугольник L_3 имеет все или несколько ребер, параллельных многоугольнику L_2 . Кроме того, в случае, когда многоугольник L_3 передвигается по плоскости, его ребра должны перекрывать носитель преобразованного уравнения.

Предположим, что многоугольник L_3 построен. Тогда анализируя его, можно написать простейшее уравнение

$$E_m(Y(z), Y_z(z), \dots, z) = 0. \quad (5.5.4)$$

Если удастся найти простейшее уравнение, такое, что выполняется соотношение

$$M_n(F(Y, Y_z, \dots, z)) = \hat{R} E_m(Y, Y_z, \dots, z), \quad (5.5.5)$$

где \hat{R} — дифференциальный оператор, то это означает, что для любого решения $Y(z)$ простейшего уравнения (5.5.4) существует решение (5.5.3) исходного нелинейного дифференциального уравнения (5.5.1).

При выборе простейшего уравнения естественным является требование о том, что порядок простейшего уравнения выбирается меньшим, чем порядок исходного уравнения, соответствующего многоугольнику L_2 . Самыми важными простейшими уравнениями являются такие уравнения, общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек. Если общее (или

частное) решение простейшего решения находится, то для изучаемого уравнения по формуле (5.5.3) находятся точные решения.

Применение многоугольников Ньютона для построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений можно сформулировать в виде следующих шести шагов.

Первый шаг. Построение многоугольника L_1 , соответствующего исходному уравнению.

Второй шаг. Определение порядка подвижного полюса общего решения изучаемого уравнения и написание преобразования (5.5.3), связывающего решения уравнений.

Третий шаг. Построение многоугольника L_2 соответствующего преобразованному уравнению.

Четвертый шаг. Построение многоугольника L_3 , характеризующего простейшее уравнение.

Пятый шаг. Выбор простейшего уравнения с неизвестными параметрами, соответствующего многоугольнику L_3 .

Шестой шаг. Определение коэффициентов преобразования (5.5.3) и параметров простейшего уравнения.

В случае, когда полюс общего решения простейшего уравнения совпадает с полюсом исходного уравнения, простейшее уравнение часто выбирается без преобразования исходного уравнения (5.5.3). В этом случае формула (5.5.3) становится тождественной подстановкой: $y(z) \equiv Y(z)$.

5.5.1. Точные решения обобщенного уравнения Курамoto—Сивашинского

Продemonстрируем применение метода многоугольников для построения точных решений обобщенного уравнения Курамoto—Сивашинского [130]

$$u_t + \alpha u^m u_x + \delta u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0. \quad (5.5.6)$$

Вводя новые переменные

$$x' = x \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}, \quad t' = t \frac{\delta^2}{\gamma}, \quad u' = u, \quad \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\gamma \delta}}, \quad \alpha' = \frac{\alpha \sqrt{\gamma \delta}}{\delta}, \quad (5.5.7)$$

получаем уравнение (штрихи далее опускаются)

$$u_t + \alpha u^m u_x + u_{xx} + \sigma u_{xxx} + u_{xxxx} = 0. \quad (5.5.8)$$

Используя переменные бегущей волны

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - C_0 t, \quad (5.5.9)$$

и интегрируя полученное уравнение по переменной z , приходим к уравнению

$$M_3[y] = y_{zzz} + \sigma y_{zz} + y_z - C_0 y + \frac{\alpha}{m+1} y^{m+1} = 0, \quad (5.5.10)$$

где постоянная интегрирования полагается равной нулю. Точные решения уравнения (5.5.10) находятся в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 5.1. Пусть $y(z)$ — решение уравнения

$$y_z = \left(-\frac{9\alpha}{2m^3 + 11m^2 + 18m + 9} \right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{m+3}{3}} \mp \frac{3}{\sqrt{2m^2 + 18m + 27}} y. \quad (5.5.11)$$

Тогда $y(z)$ является также решением уравнения (5.5.10) при $m \neq 0$, $m \neq -1$, $m \neq -\frac{3}{2}$, $m \neq -3$, $m \neq \frac{-9 \pm 3\sqrt{3}}{2}$,

$$C_0 = \mp \frac{3(2m^2 + 9m + 9)}{(2m^2 + 18m + 27)^{3/2}}, \quad (5.5.12)$$

$$\sigma = \pm \frac{3(3+m)}{\sqrt{2m^2 + 18m + 27}}.$$

Доказательство. Мономам уравнения (5.5.10) соответствуют следующие точки на плоскости: $M_1 = (-3, 1)$, $M_2 = (-2, 1)$, $M_3 = (-1, 1)$, $M_4 = (0, 1)$ и $M_5 = (0, m + 1)$. Многоугольник L_1 , соответствующий уравнению (5.5.10), является большим треугольником на рис. 5.7 (здесь левый треугольник соответствует $m > 0$ и, правый треугольник соответствует $m < 0$). Подходящий многоугольник L_3 может быть найден без преобразования исходного уравнения это малый треугольник на рис. 4.10, который содержит точки: $Q_1 = (-1, 1)$, $Q_2 = M_4 = (0, 1)$, и $Q_3 = (0, 1 + \frac{m}{3})$.

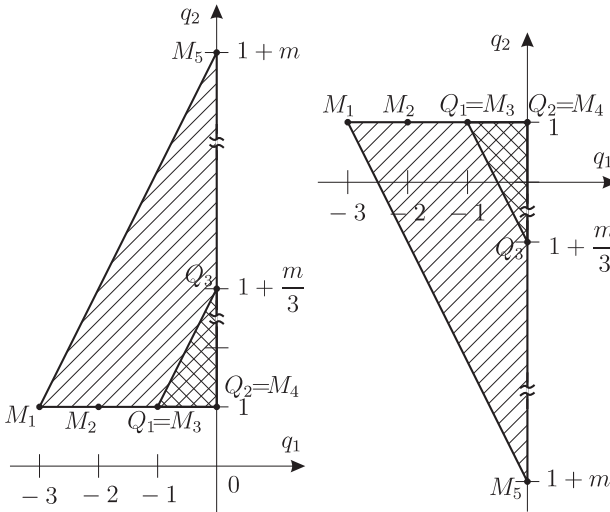


Рис. 5.7. Многоугольники Ньютона, соответствующие дифференциальным уравнениям (5.5.10) и (5.5.13) при $m > 0$ (слева) и при $m < 0$ (справа)

Простейшее уравнение, соответствующее многоугольнику L_3 , можно представить в виде

$$E_1[y] = y_z - A y^{\frac{m+3}{3}} - B y = 0, \quad (5.5.13)$$

где A и B — параметры уравнения, которые следует найти.

Общее решение уравнения (5.5.13) определяется формулой

$$y(z) = \left(C_1 \exp \left\{ -\frac{B m z}{3} \right\} - \frac{A}{B} \right)^{-\frac{3}{m}}. \quad (5.5.14)$$

Подставляя

$$y_z = E_1[y] + A y^{\frac{m+3}{3}} + B y \quad (5.5.15)$$

в уравнение (5.5.10) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $y(z)$, приходим к алгебраическим уравнениям относительно параметров A , B , C_0 и σ

$$A^3 (2m + 3) (m + 3) (m + 1) + 9\alpha = 0, \quad (5.5.16)$$

$$(m + 1) (B^3 + \sigma B^2 + B - C_0) = 0, \quad (5.5.17)$$

$$A^2 (3 + m) (m + 1) (Bm + 3B + \sigma) = 0, \quad (5.5.18)$$

$$(m + 1) (2\sigma^2 m^2 + 18\sigma^2 m + 27\sigma^2 - 9m^2 - 54m - 81) = 0. \quad (5.5.19)$$

Решая уравнения (5.5.16), (5.5.17), (5.5.18) и (5.5.19), получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= (-9\alpha)^{1/3} (m^3 + 11m^2 + 18m + 9)^{-1/3}, \\ A_{2,3} &= (-9\alpha)^{1/3} \left(-\frac{1}{2} \mp i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &\quad (m^3 + 11m^2 + 18m + 9)^{-1/3}, \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

$$C_0 = B (B^2 + \sigma B + 1), \quad B = -\frac{\sigma}{3 + m}, \quad (5.5.21)$$

$$\sigma = \pm \frac{3(3 + m)}{\sqrt{2m^2 + 18m + 27}}. \quad (5.5.22)$$

Таким образом, мы нашли значения параметров уравнения (5.5.14), зависимость (5.5.12) и соотношение

$$M_3[y] = \hat{R} E_1[y], \quad (5.5.23)$$

где \hat{R} — дифференциальный оператор.

Общее решение уравнения (5.5.12) можно представить в виде

$$y(z) = \left(C + C_1 \exp \left\{ \pm \frac{m z}{\sqrt{2 m^2 + 18 m + 27}} \right\} \right)^{-\frac{3}{m}}, \quad (5.5.24)$$

где C_1 — произвольная постоянная, C определяется выражением

$$C = \pm \frac{\sqrt[3]{-9\alpha} \sqrt{2 m^2 + 18 m + 27}}{3 \sqrt[3]{(m+3)(2 m^2 + 5 m + 3)}}. \quad (5.5.25)$$

Скорость уединенной волны (5.5.24) при $m \rightarrow 0$ стремится к $C_0 = \mp 1/\sqrt{27}$. Однако при $m \rightarrow \infty$ скорость $C_0 \rightarrow 0$.

Полагая $m = 1$ в (5.5.24), получим решение в виде уединенной волны

$$y(z) = \left(\frac{\sqrt{47} \sqrt[3]{-225\alpha}}{30} + C_1 \exp \left\{ \pm \frac{x - C_0 t}{\sqrt{47}} \right\} \right)^{-3}, \quad (5.5.26)$$

$$C_0 = \mp \frac{60}{47\sqrt{47}}.$$

а также значение параметра σ : $\sigma = \pm 12/\sqrt{47}$. Это решение уравнения Курамото—Сивашинского представляет собой кинк [41, 45, 113, 120, 124]. Некоторые другие решения обобщенного уравнения Курамото—Сивашинского (5.5.6) получены в работе [131].

5.5.2. Автомодельные решения уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка

Используя многоугольники Ньютона, найдем решения уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка [130]

$$u_t + u_{xxxxx} - 10 u u_{xxx} - 20 u_x u_{xx} + 30 u^2 u_x = 0. \quad (5.5.27)$$

Решения уравнения (5.5.27) будем искать, используя автомодельные переменные

$$u(x, t) = \frac{1}{(5t)^{2/5}} y(z), \quad z = \frac{x}{(5t)^{1/5}}, \quad (5.5.28)$$

где $y(z)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y_{zzzzz} - 10 y y_{zzz} - 20 y_z y_{zz} + 30 y^2 y_z - z y_z - 2 y = 0. \quad (5.5.29)$$

Результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5.2. Пусть $Y(z)$ — решение уравнения

$$\begin{aligned} Y_{zzzzz} - 40 Y Y_{zz} Y_z - 10 Y^2 Y_{zzz} - 10 Y_z^3 + \\ + 30 Y^4 Y_z - Y - z Y_z = 0. \end{aligned} \quad (5.5.30)$$

Тогда

$$y(z) = \pm Y_z - Y^2 \quad (5.5.31)$$

является решением уравнения (5.5.29).

Доказательство. Мономам уравнения (5.5.29) соответствуют точки на плоскости: $M_1 = (-5, 1)$, $M_2 = (-3, 2)$, $M_3 = (-3, 2)$, $M_4 = (-1, 3)$, $M_5 = (0, 1)$ и $M_6 = (0, 1)$. Носитель уравнения (5.5.29) определяется точками: $Q_1 = M_1 = (-5, 1)$, $Q_2 = M_4 = (-1, 3)$, $Q_3 = M_5 = M_6 = (0, 1)$ и $Q_4 = M_2 = M_3 = (-3, 2)$. Соответствующий многоугольник L_1 представлен на рис. 5.8.

Общее решение уравнения (5.5.29) имеет полюс второго порядка. Поэтому решение будем искать в виде

$$y = A_1 Y + A_2 Y^2 + A_3 Y_z, \quad (5.5.32)$$

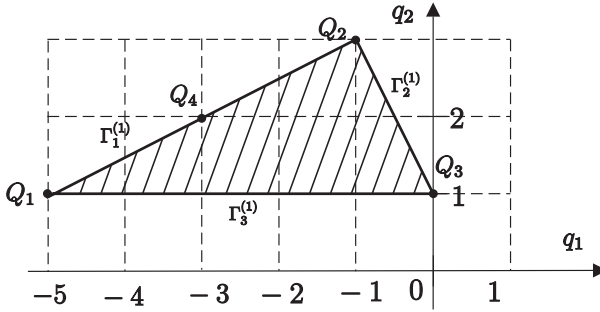


Рис. 5.8. Многоугольник, соответствующий дифференциальному уравнению (5.5.29)

где $Y(z)$ является решением простейшего уравнения с полюсом первого порядка, которое требуется найти. Подставляя (5.5.32) в уравнение (5.5.29), получаем

$$\begin{aligned}
 & A_1 Y_{zzzzz} + A_2 Y_{zzzzz}^2 + A_3 Y_{zzzzzz} + \\
 & + 10 (A_1 Y + A_2 Y^2 + A_3 Y_z) (A_1 Y_{zzz} + A_2 Y_{zzz}^2 + A_3 Y_{zzzz}) + \\
 & + 20 (A_1 Y_z + A_2 Y_z^2 + A_3 Y_{zz}) (A_1 Y_{zz} + A_2 Y_{zz}^2 + A_3 Y_{zzz}) + \\
 & + 30 (A_1 Y + A_2 Y^2 + A_3 Y_z)^2 (A_1 Y_z + A_2 Y_z^2 + A_3 Y_{zz}) - \\
 & - z (A_1 Y_z + A_2 Y_z^2 + A_3 Y_{zz}) - 2 A_1 Y - \\
 & - 2 A_2 Y^2 - 2 A_3 Y_z = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.5.33}$$

Носитель этого уравнения определяется десятью точками: $Q_1 = (-6, 1)$, $Q_2 = (-5, 2)$, $Q_3 = (-4, 3)$, $Q_4 = (-3, 4)$, $Q_5 = (-2, 5)$, $Q_6 = (-1, 6)$, $Q_7 = (0, 2)$, $Q_8 = (0, 1)$, $Q_9 = (-1, 1)$, $Q_{10} = (-5, 1)$. Многоугольником L_2 является четырехугольник, который представлен на рис. 5.9. Используя этот многоугольник, можно построить многоугольник L_3 , в качестве которого можно взять треугольник, представленный на рис. 5.9. Простейшим

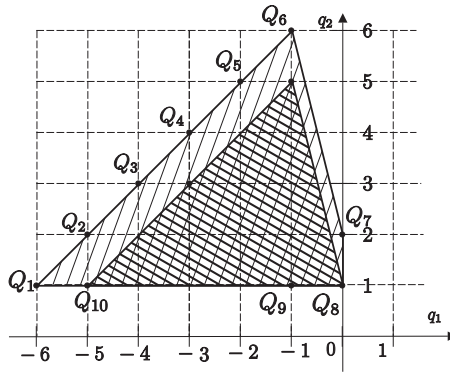


Рис. 5.9. Многоугольники дифференциальных уравнений (5.5.33) и (5.5.34)

уравнением, соответствующим (5.5.33), является уравнение

$$E_5[Y] = Y_{zzzzz} + m_1 Y Y_{zz} Y_z + m_2 Y^2 Y_{zzz} + m_3 Y_z^3 + m_4 Y^4 Y_z + m_5 Y + m_6 z Y_z = 0, \quad (5.5.34)$$

где m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 — параметры, значения которых необходимо найти.

Подставляя

$$Y_{zzzzz} = E_5[Y] - m_1 Y Y_{zz} Y_z - m_2 Y^2 Y_{zzz} - m_3 Y_z^3 - m_4 Y^4 Y_z - m_5 Y - m_6 z Y_z \quad (5.5.35)$$

в уравнение (5.5.33) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $Y(z)$ нулю, приходим к алгебраическим уравнениям относительно параметров m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 . Решая уравнения, получаем значения

$$\begin{aligned} m_1 = -40, \quad m_2 = -10, \quad m_3 = -10, \quad m_4 = 30, \\ m_5 = -1, \quad m_6 = -1 \end{aligned} \quad (5.5.36)$$

и соотношение

$$M_5[y(Y)] = \hat{R} E_5[Y], \quad (5.5.37)$$

где \hat{R} — дифференциальный оператор.

Уравнение (5.5.30) может быть проинтегрировано по z , и в результате приходим к уравнению четвертого порядка в виде

$$Y_{zzzz} - 10 Y^2 Y_{zz} - 10 Y Y_z^2 + 6 Y^5 - z Y - \beta = 0, \quad (5.5.38)$$

где β — произвольный параметр. Таким образом, для решений уравнения (5.5.29) (и, следовательно, для построения решений уравнения (5.5.27)) получаем преобразование Миуры (5.5.31).

5.5.3. Автомодельные решения модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка

Используя многоугольник Ньютона найдем автомодельные решения модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка

$$u_t - 10u^2 u_{xxx} - 40u_x u_{xx} - 10u_x^3 + 30u^4 u_x + u_{xxxxx} = 0. \quad (5.5.39)$$

Решения будем искать в виде [107, 121, 130]

$$u(x, t) = (5t)^{-1/5} w(z), \quad z = x (5t)^{-1/5}, \quad (5.5.40)$$

где $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$M_4[w] = w_{zzzz} - 10 w^2 w_{zz} - 10 w w_z^2 + 6 w^5 - z w - \beta = 0. \quad (5.5.41)$$

Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5.3. Пусть $Y(z)$ — решение уравнения

$$Y_{zzz} + 2b Y Y_{zz} - b Y_z^2 - 6b^2 Y^2 Y_z - 3b^3 Y^4 + \frac{z}{2b} = 0. \quad (5.5.42)$$

Тогда

$$w(z) = \pm b Y(z) \quad (5.5.43)$$

является решением уравнения (5.5.41) при $\beta = \mp 1/2$.

Доказательство. Построим многоугольник, соответствующий уравнению (5.5.41). Мономам уравнения (5.5.41) соответствуют точки на плоскости: $M_1 = (-4, 1)$, $M_2 = (-2, 3)$, $M_3 = (-2, 3)$, $M_4 = (0, 5)$, $M_5 = (1, 1)$, $M_6 = (0, 0)$. Носитель уравнения содержит пять точек: $Q_1 = M_1$, $Q_2 = M_4$, $Q_3 = M_5$, $Q_4 = M_6$ и $Q_5 = M_2 = M_3$. Внешней оболочкой этого носителя является четырехугольник L_1 с вершинами $\Gamma_j^{(0)} = Q_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) и ребрами $\Gamma_1^{(1)} = [Q_1, Q_2]$, $\Gamma_2^{(1)} = [Q_2, Q_3]$, $\Gamma_3^{(1)} = [Q_3, Q_4]$, $\Gamma_4^{(1)} = [Q_1, Q_4]$ (рис. 5.10).

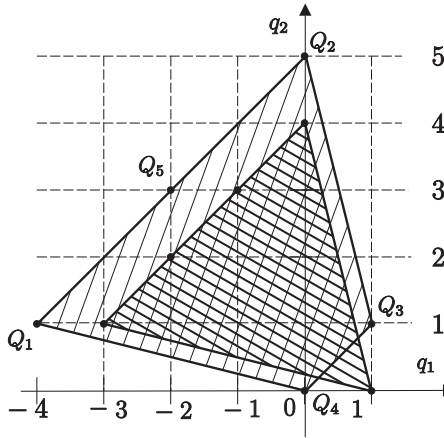


Рис. 5.10. Многоугольники дифференциальных уравнений (5.5.41) и (5.5.46)

Ведущие члены уравнения (5.5.39) расположены на ребре $\Gamma_1^{(1)} = [Q_1, Q_2]$. Подставляя $w(z) = a_0 z^p$ в уравнение

$$w_{zzzz} - 10 w^2 w_{zz} - 10 w w_z^2 + 6 w^5 = 0, \quad (5.5.44)$$

получаем четыре ветви разложений решений уравнения (5.5.41): $(p, a_0) = (-1, 1)$, $(-1, -2)$, $(-1, -3)$, и $(-1, 4)$. Учитывая порядок полюса решения уравнения (5.5.41), будем искать точные ре-

шения в виде

$$w(z) = A_1 Y(z), \quad A_1 \neq 0, \quad (5.5.45)$$

где $Y(z)$ — решение простейшего уравнения

$$Y_{zzz} - a Y Y_{zz} - b Y_z^2 - c Y^2 Y_z - d Y^4 - m z = 0. \quad (5.5.46)$$

Параметры a, b, c, d и m находятся после подстановки (5.5.45) в уравнение (5.5.41). Подставляя (5.5.45) в (5.5.41) и используя уравнение

$$\begin{aligned} Y_{zzz} = E_3[Y] + a Y Y_{zz} + b Y_z^2 + c Y^2 Y_z + \\ + d Y^4 + m z = 0, \end{aligned} \quad (5.5.47)$$

приходим к алгебраическим уравнениям относительно параметров a, b, c, d, m, β и A_1 . Решая уравнения, получаем значения

$$\begin{aligned} a = -2b, \quad c = 6b^2, \quad d = 3b^3, \quad m = -\frac{1}{2b}, \\ A_{1,2} = \pm b, \quad \beta = \mp \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.5.48)$$

и соотношение [130]

$$M_4[w(Y)] = \hat{R} E_3[Y]. \quad (5.5.49)$$

Следовательно, уравнение (5.5.41) имеет решение, которое выражается через функцию от $Y(z)$ при $\beta = \pm 1/2$.

Решениями уравнения (5.5.42) являются трансценденты первого уравнения Пенлеве

$$v_{zz} = 3b v^2 + \frac{1}{2b} z. \quad (5.5.50)$$

Справедливость утверждения проверяется непосредственной подстановкой (5.5.50) в уравнение (5.5.42).

5.5.4. Уединенные волны нелинейного эволюционного уравнения шестого порядка

Найдем точные решения нелинейного эволюционного уравнения шестого порядка:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xx} + \delta u_{xxx} + \varepsilon u_{xxxxx} = 0. \quad (5.5.51)$$

Решение уравнения будем искать, используя переменные бегущей волны

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - C_0 t, \quad (5.5.52)$$

где $y(z)$ удовлетворяет уравнению

$$C_1 - C_0 y + \frac{1}{2} y^2 + \beta y_z + \delta y_{zzz} + \varepsilon y_{zzzzz} = 0, \quad (5.5.53)$$

C_1 — постоянная интегрирования. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5.4. Пусть $Y(z)$ — решение уравнения Риккати

$$Y_z + Y^2 - \alpha_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \quad (5.5.54)$$

Тогда решение уравнения (5.5.53) находится по формуле

$$\begin{aligned} y(z) = & 30240 \varepsilon Y^5 + \left(\frac{2520}{11} \delta - 50400 \varepsilon \alpha_k \right) Y^3 + \\ & + \left(20160 \varepsilon \alpha_k^2 - \frac{2520}{11} \delta \alpha_k + \frac{1260}{251} \beta - \frac{12600}{30371} \frac{\delta^2}{\varepsilon} \right) Y + \\ & + C_0. \end{aligned} \quad (5.5.55)$$

где

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \frac{4112640}{11} \frac{\delta^5 w_k^4}{\varepsilon^3} - 9999360 \frac{\delta^5 w_k^5}{\varepsilon^3} - \frac{5080320}{251} \frac{\delta^3 w_k^3 \beta}{\varepsilon^2} - \\
 & - \frac{55460160}{30371} \frac{\delta^5 w_k^3}{\varepsilon^3} + \frac{660240}{2761} \frac{\delta^3 w_k^2 \beta}{\varepsilon^2} - \frac{25200}{30371} \frac{\delta^5 w_k^2}{\varepsilon^3} - \\
 & - \frac{1260}{251} \frac{\beta^2 \delta w_k}{\varepsilon} + \frac{12600}{30371} \frac{\beta \delta^3 w_k}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} C_0^2,
 \end{aligned} \tag{5.5.56}$$

$$\beta = - \frac{213811840 \varepsilon^3 \alpha_k^3 - 10204656 \delta \varepsilon^2 \alpha_k^2 - 2045 \delta^3 - 92400 \delta^2 \varepsilon \alpha_k}{121 \varepsilon (9240 \varepsilon \alpha_k + 79 \delta)}, \tag{5.5.57}$$

$$\alpha_k = \frac{\delta w_k}{\varepsilon} \quad (k = 1, 2, \dots, 6), \tag{5.5.58}$$

$$w_1 = -\frac{1}{220}, \quad w_2 = -\frac{5}{176}, \quad w_3 = -\frac{1}{440}, \tag{5.5.59}$$

$$w_4 = \frac{1}{52800} \left(557 - \frac{46031}{m} + m \right), \tag{5.5.60}$$

$$w_{5,6} = \frac{1}{52800} \left(\frac{46031}{2m} - \frac{m}{2} + 557 \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(m + \frac{46031}{m} \right) \right), \tag{5.5.61}$$

$$m = (113816753 + 1260\sqrt{8221079733})^{\frac{1}{3}} \approx 610,966. \tag{5.5.62}$$

Доказательство. Мономам уравнения (5.5.53) соответствуют следующие точки на плоскости: $Q_1 = (-5, 1)$, $Q_2 = (0, 2)$, $Q_3 = (0, 0)$, $Q_4 = (-3, 1)$ и $Q_5 = (-1, 1)$. Многоугольник Ньютона L_1 , соответствующий уравнению (5.5.53), — треугольник изображенный на рис. 5.11.

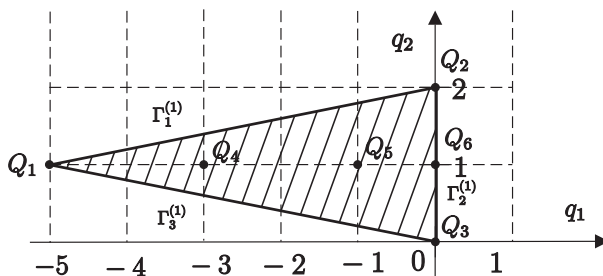


Рис. 5.11. Многоугольник, соответствующий дифференциальному уравнению (5.5.53)

Общее решение уравнения (5.5.53) имеет полюс пятого порядка, следовательно, будем искать решения уравнения (5.5.53) в виде многочлена пятой степени

$$y(z) = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + A_3 Y^3 + A_4 Y^4 + A_5 Y^5. \quad (5.5.63)$$

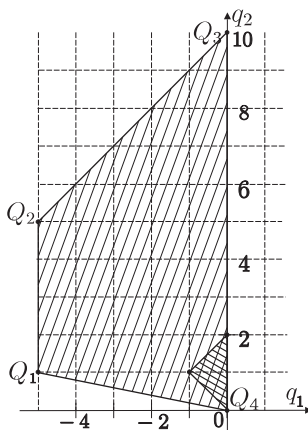


Рис. 5.12. Многоугольник, соответствующий преобразованному дифференциальному уравнению (5.5.53) и простейшему уравнению (5.5.64)

Подставляя выражение (5.5.63) в (5.5.53), получаем новое уравнение и новый многоугольник L_2 в виде четырехугольника (рис. 5.15). Подходящим многоугольником L_3 является треугольник на рис. 5.15. Этому треугольнику соответствует уравнение Риккати с постоянными коэффициентами

$$E_1[Y] = Y_z + Y^2 - \alpha = 0. \quad (5.5.64)$$

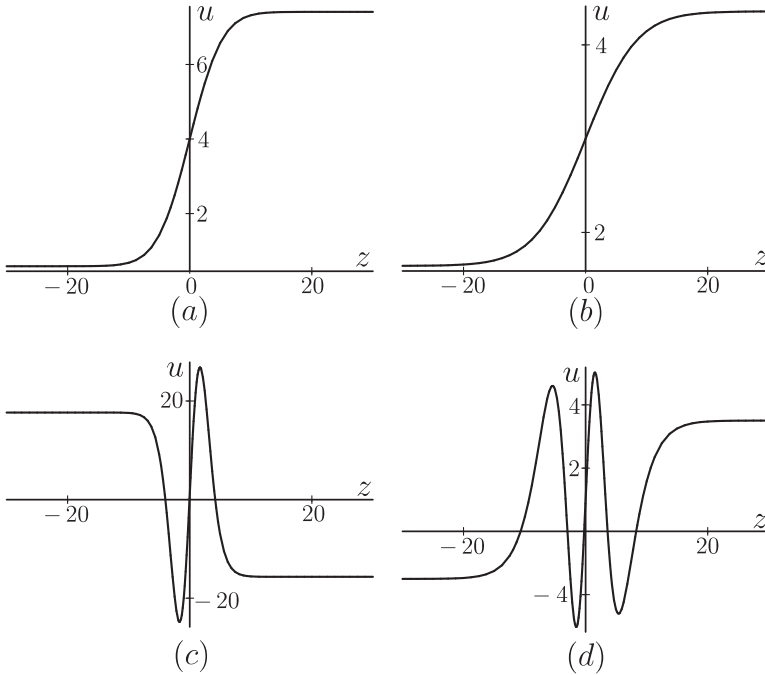


Рис. 5.13. Уединенная волна описываемая уравнением (5.5.53) при: (a) — $\alpha = \alpha_1$; (b) — $\alpha = \alpha_2$; (c) — $\alpha = \alpha_3$; (d) — $\alpha = \alpha_4$;

Подставляя

$$Y_z = E_1[Y] - Y^2 + \alpha_k \quad (5.5.65)$$

в уравнение (5.5.53) и приравнявая нулю коэффициенты при разных степенях $Y(z)$, приходим к алгебраическим уравнениям от-

носительно коэффициентов $A_5, A_4, A_3, A_2, A_1, A_0$ и параметров C_1, β, α_k и w_k . Решая эту систему уравнений, имеем:

$$\begin{aligned} A_5 &= 30240 \varepsilon, \quad A_4 = 0, \quad A_3 = \frac{2520\delta}{11} - 50400\varepsilon\alpha, \quad A_2 = 0, \\ A_1 &= -\frac{2520}{11} \delta \alpha + 20160 \varepsilon \alpha^2 + \frac{1260}{251} \beta - \frac{12600}{30371} \frac{\delta^2}{\varepsilon}, \quad A_0 = C_0. \end{aligned}$$

Для параметров C_1, β, α_k , и w_k находим выражения (5.5.56), (5.5.57), (5.5.58), (5.5.59), (5.5.60), и (5.5.62). При этом получаем соотношение в виде:

$$M_5[y(Y)] = \hat{R} E_1[Y], \quad (5.5.66)$$

где \hat{R} — дифференциальный оператор.

Общее решение уравнения (5.5.54) имеет вид

$$Y(z) = \sqrt{\alpha_k} \tanh(\sqrt{\alpha_k} z + \varphi_0) \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \quad (5.5.67)$$

Подставляя (5.5.67) в (5.5.55) и учитывая, что $\alpha_k = w_k \delta / \varepsilon$ ($k = 1, \dots, 6$), находим шесть решений в виде уединенных волн уравнения (5.5.53). Четыре вида уединенных волн, которые описываются уравнением шестого порядка (5.5.53), представлены на рис. 5.13.

5.6. Аналитические свойства системы уравнений Лоренца

5.6.1. Тест Пенлеве для системы уравнений Лоренца

Система уравнений Лоренца может быть записана в виде [39]

$$\begin{aligned} x_t &= \sigma y - \sigma x, \\ y_t &= r x - y - z x, \\ z_t &= x y - b z. \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

Покажем, что (5.6.1) можно свести к одному уравнению третьего порядка. Из первого уравнения системы (5.6.1) находим

$$y = x + \frac{1}{\sigma} x_t. \quad (5.6.2)$$

Подставляя зависимость (5.6.2) во второе уравнение системы (5.6.1), приходим к уравнению

$$z = r - 1 - \frac{(1 + \sigma) x_t}{\sigma x} - \frac{x_{tt}}{\sigma x}. \quad (5.6.3)$$

Учитывая (5.6.2) и (5.6.3), из третьего уравнения системы Лоренца (5.6.1) получаем уравнение третьего порядка относительно $x(t)$

$$\begin{aligned} x x_{ttt} - x_t x_{tt} + x^3 x_t + (1 + b + \sigma) x x_{tt} - (1 + \sigma) x_t^2 + \\ + b (1 + \sigma) x x_t + \sigma x^4 + b \sigma (1 - r) x^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Проверим систему уравнений (5.6.1) на свойства Пенлеве. В отличие от работы [150], для анализа используем не систему уравнений Лоренца (5.6.1), а уравнение (5.6.4). Покажем, что в общем случае система уравнений Лоренца не проходит тест Пенлеве. Однако существуют значения параметров математической модели, при которых система уравнений Лоренца является точно решаемой. При анализе уравнения (5.6.4) воспользуемся алгоритмом Абловица—Рамани—Сигура [39], который состоит из трех шагов.

Первый шаг: нахождение семейства решений при разложении в ряд Лорана. Для определения всех ветвей решения воспользуемся укороченным уравнением, соответствующим уравнению (5.6.4):

$$x_{ttt} - x_t x_{tt} + x^3 x_t = 0. \quad (5.6.5)$$

Подставляя

$$x(t) = a_0 t^p \quad (5.6.6)$$

в укороченное уравнение (5.6.5), находим a_0 и p , в результате получаем два семейства решений системы уравнений Лоренца: $(a_0, p) = (\mp 2I, -1)$.

Второй шаг: определение индексов Фукса. Подставляя

$$x(t) = \mp \frac{2i}{t} + u_j t^{j-1} \quad (5.6.7)$$

в (5.6.5) и приравнивая нулю выражения при первой степени коэффициента u_j , находим значения j , при которых значения коэффициентов u_j определить невозможно. Для системы уравнений Лоренца индексы Фукса находятся из уравнения

$$j^3 - 5j^2 + 2j + 8 = 0. \quad (5.6.8)$$

Решив уравнение (5.6.8), получаем

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 2, \quad j_3 = 4. \quad (5.6.9)$$

Индексы Фукса целые и исследование системы уравнений Лоренца можно продолжить дальше.

Третий шаг: проверка произвольных постоянных при разложении решения в ряд Лорана. С этой целью решения уравнения (5.6.4) ищутся в виде

$$x(t) = \mp \frac{2i}{t - t_0} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (t - t_0)^{j-1}. \quad (5.6.10)$$

Подставляя (5.6.10) в уравнение (5.6.4) и последовательно вычисляя коэффициенты разложения, получаем разложение в ряд Лорана решения системы уравнений Лоренца. Коэффициент a_1 имеет вид

$$a_1 = \pm \frac{i}{3} (1 + 2b - 3\sigma). \quad (5.6.11)$$

Для того чтобы коэффициент a_2 был произвольным, необходимо, чтобы обратилось в нуль выражение

$$(b - 2\sigma)(b - 1 + 3\sigma) = 0. \quad (5.6.12)$$

При $b = 2\sigma$ коэффициент a_3 находим в виде

$$a_3^{(1)} = \pm \frac{i}{108} [19\sigma^3 \pm 270i\sigma a_2 - 69\sigma^2 + \\ + 21\sigma - 54ia_2 + 108\sigma^2 r + 1]. \quad (5.6.13)$$

В случае $b = 1 - 3\sigma$ коэффициент a_3 определяется по формуле

$$a_3^{(2)} = \pm \frac{i\sigma}{2} (36\sigma^2 - 21\sigma + 3 - 3r\sigma + r). \quad (5.6.14)$$

Требование произвольности коэффициента a_4 при $b = 2\sigma$ приводит к уравнению

$$\frac{4}{27} (1 + 2\sigma) + \frac{4}{9} (30r - 19) \sigma^2 - \frac{4}{27} (18r - 31) \sigma^3 - \\ - \frac{8}{27} \sigma^4 \mp 8ia_2 (1 - 3\sigma + 2\sigma^2) = 0. \quad (5.6.15)$$

Из (5.6.15) получаем два условия того, что при $b = 2\sigma$ значения коэффициентов a_2 и a_4 произвольны :

$$(1 + 2\sigma^2 - 3\sigma) = 0, \quad (5.6.16)$$

$$\frac{4}{27} (1 + 2\sigma) + \frac{4}{9} (30r - 19) \sigma^2 - \frac{4}{27} (18r - 31) \sigma^3 - \\ - \frac{8}{27} \sigma^4 = 0. \quad (5.6.17)$$

Из уравнения (5.6.16) находим два значения параметра σ : $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = \frac{1}{2}$. При этом значения r определяются из уравнения (5.6.17) $r_1 = \frac{1}{9}$ и $r_2 = 0$. Параметр b в этом случае принимает два значения: $b_1 = 2$ и $b_2 = 1$. Разложения двух семейств решений при $b = 2\sigma$ только в этих двух случаях имеют три произвольные постоянные и, следовательно, только при этих двух значениях параметров система уравнений Лоренца проходит тест Пенлеве.

Если условия (5.6.16) и (5.6.17) не выполняются, то для произвольности a_4 коэффициент a_2 следует взять в виде:

$$a_2 = \frac{i(57\sigma^2 - 90\sigma^2 r + 18\sigma^3 r - 31\sigma^3 - 19\sigma + 2\sigma^4 - 1)}{54(1 - 3\sigma + 2\sigma^2)}. \quad (5.6.18)$$

В случае $b = 1 - 3\sigma$ коэффициент a_4 является произвольным при

$$(21i\sigma^2 - 21i\sigma + 4i - ir\sigma + ir \pm 6a_2)\sigma(3\sigma - 1) = 0. \quad (5.6.19)$$

Из (5.6.19) следует, что при значениях $\sigma_3 = 0$, $\sigma_4 = \frac{1}{3}$ и, соответственно, при $b_3 = 1$, $b_4 = 0$ и в случае произвольных значений r коэффициенты a_2 и a_4 при разложении решения уравнения (5.6.4) в ряд Лорана могут быть произвольными. В этих случаях система уравнений Лоренца снова проходит тест Пенлеве.

Если условие (5.6.19) не выполняется, то в разложении решения в ряд Лорана появляется коэффициент a_2 , равный

$$a_2 = \mp \frac{i}{6} (21\sigma^2 - 21\sigma - r\sigma + r + 4). \quad (5.6.20)$$

Для неинтегрируемого случая при $b = 2\sigma$ разложение решений для первого семейства имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{-2i}{(t-t_0)} - \frac{1}{3}i(-1 + 3\sigma - 2b) + \\ & + \frac{i(57\sigma^2 - 1 - 19\sigma - 31\sigma^3 - 90\sigma^2 r + 2\sigma^4 + 18\sigma^3 r)}{54(1 - 3\sigma + 2\sigma^2)}(t-t_0) + \\ & + \frac{5i\sigma(57\sigma^2 - 1 - 19\sigma - 31\sigma^3 - 90\sigma^2 r + 2\sigma^4 + 18\sigma^3 r)}{108(1 - 3\sigma + 2\sigma^2)}(t-t_0)^2 + \\ & + \frac{i(57\sigma^2 - 1 - 19\sigma - 31\sigma^3 - 90\sigma^2 r + 2\sigma^4 + 18\sigma^3 r)}{108(1 - 3\sigma + 2\sigma^2)}(t-t_0)^2 + \\ & + \frac{i}{108}(1 + 21\sigma - 69\sigma^2 + 19\sigma^3 + 108\sigma^2 r)(t-t_0)^2 + \\ & + a_4(t-t_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.6.21)$$

В случае $b = 1 - 3\sigma$ для первого семейства решений получаем разложение в виде

$$\begin{aligned}
 x(t) = & -\frac{2i}{(t-t_0)} + \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}ib - i\sigma + \\
 & + \left(\frac{1}{6}ir\sigma - \frac{7}{2}i\sigma^2 + \frac{7}{2}i\sigma - \frac{1}{6}ir - \frac{2}{3}i \right) (t-t_0) + \\
 & + \left(\frac{1}{2}ir\sigma - \frac{3}{2}i\sigma^2r + 18i\sigma^3 - \frac{21}{2}i\sigma^2 + \frac{3}{2}i\sigma \right) (t-t_0)^2 + \\
 & + a_4(t-t_0)^3 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.6.22}$$

Из (5.6.21) и (5.6.22) видно, что при $b = 2\sigma$ и $b = 1 - 3\sigma$ разложения решений системы уравнений Лоренца в ряд Лорана в общем случае имеют только две произвольные постоянные, и, вообще говоря, в этих случаях система уравнений Лоренца не обладает свойством Пенлеве. Таким образом, для системы уравнений Лоренца (5.6.1) существуют четыре набора значений параметров σ , b и r , при которых система проходит тест Пенлеве [150].

Случай 1: $\sigma = 1$, $b = 2$, $r = \frac{1}{9}$. В этом случае для системы уравнений Лоренца находится один первый интеграл. Система уравнений приводится ко второму уравнению Пенлеве. Общее решение выражается через трансценденты второго уравнения Пенлеве.

Случай 2: $\sigma = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $r = 0$. В этом случае система Лоренца имеет два независимых интеграла. Общее решение выражается через эллиптическую функцию.

Случай 3: $\sigma = 0$, $b = 1$, r — произвольная постоянная. В этом случае система Лоренца приводится к линейному уравнению.

Случай 4: $\sigma = \frac{1}{3}$, $b = 0$, r — произвольная постоянная. Система Лоренца в этом случае имеет один первый интеграл, и уравнение приводится к третьему уравнению Пенлеве. Общее решение выражается через трансценденты третьего уравнения Пенлеве.

В случае $b = 2\sigma$ система Лоренца имеет первый интеграл. Однако без дополнительных ограничений в этом случае она не

является точно решаемой. Тем не менее, некоторый набор точных решений для этого случая находятся и будут представлены ниже. Точные решения системы уравнений Лоренца находятся также при $b = 1 - 3\sigma$.

5.6.2. Первые интегралы системы уравнений Лоренца

Поиску первых интегралов системы уравнений Лоренца посвящен ряд работ [100, 133, 135, 144, 145].

Запишем систему уравнений Лоренца в виде

$$x_t + \sigma x = \sigma y, \quad (5.6.23)$$

$$y_t + y = r x - z x, \quad (5.6.24)$$

$$z_t + b z = x y. \quad (5.6.25)$$

Найдем первые интегралы для интегрируемых случаев системы уравнений Лоренца.

Случай 1: $b = 2\sigma$, σ и r — произвольные постоянные. Умножим уравнение (5.6.23) на x и уравнение (5.6.25) на σ . Тогда имеем

$$x x_t + \sigma x^2 = \sigma x y, \quad (5.6.26)$$

$$\sigma z_t + b \sigma z = \sigma x y. \quad (5.6.27)$$

Вычитая (5.6.27) из (5.6.26), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} - \sigma z \right) + \sigma x^2 - b z^2 = 0. \quad (5.6.28)$$

Откуда при $b = 2\sigma$ приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} - \sigma z \right) + 2\sigma \left(\frac{x^2}{2} - \sigma z \right) = 0, \quad (5.6.29)$$

имеющему решение

$$\frac{x^2}{2} - \sigma z = C_1 \exp \{-2\sigma t\}. \quad (5.6.30)$$

Первый интеграл системы Лоренца в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{x^2}{2} - \sigma z\right) \exp\{2\sigma t\} = C_1. \quad (5.6.31)$$

Случай 2: $b = 1$, $\sigma = 1$, r — произвольная постоянная.

Умножив уравнение (5.6.23) на x и уравнение (5.6.25) на z , получим

$$x x_t + \sigma x^2 = \sigma x y, \quad (5.6.32)$$

$$y y_t + y^2 = r x y - x y z, \quad (5.6.33)$$

$$z z_t + b z^2 = x y z. \quad (5.6.34)$$

Из (5.6.32) — (5.6.34) получаем соотношение

$$y y_t + y^2 = \frac{r}{\sigma} (x x_t + \sigma x^2) - z z_t - b z^2. \quad (5.6.35)$$

Уравнение (5.6.35) можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(y^2 + z^2 - \frac{r}{\sigma} x^2 \right) + y^2 + b z^2 - r x^2 = 0, \quad (5.6.36)$$

откуда при $b = 1$ и $\sigma = 1$ находим первый интеграл системы уравнений Лоренца в виде

$$(y^2 + z^2 - r x^2) \exp\{2t\} = C_2. \quad (5.6.37)$$

Случай 3: $b = 1$, $r = 0$, σ — произвольная постоянная.

Умножив уравнение (5.6.24) на y и уравнение (5.6.25) на z , имеем

$$y y_t + y^2 = r x y - x y z, \quad (5.6.38)$$

$$z z_t + b z^2 = x y z. \quad (5.6.39)$$

Сложив уравнения (5.6.38) и (5.6.39), получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^2 + z^2) + y^2 + b z^2 = r x y. \quad (5.6.40)$$

Полагая $r = 0$ и $b = 1$ в (5.6.40), находим еще один первый интеграл системы уравнений Лоренца в виде

$$(y^2 + z^2) \exp \{2t\} = C_3. \quad (5.6.41)$$

Для поиска оставшихся трех первых интегралов применим метод неопределенных коэффициентов. Произвольной постоянной в разложении решения системы Лоренца в ряд Лорана является a_4 , и поэтому следует ожидать, что первые интегралы системы Лоренца содержат полиномы, которые составлены из мономов четвертого порядка:

$$P_4 = B_1 x^2 y + A_0 x^2 + S_2 x z + S_1 x y + B_3 y z + B_4 y^2 + A_2 z + A_1 y + E_0 x + B_5 z^2 + S_0 x^3 + B_0 x^4 + B_2 x^2 z, \quad (5.6.42)$$

где $E_0, A_0, \dots, A_2, S_0, \dots, S_5, B_0, \dots, B_5$ — ненулевые постоянные, значения которых требуется найти.

Пусть первый интеграл системы уравнений Лоренца имеет вид:

$$P_4 \exp \{\gamma t\} = C_4, \quad (5.6.43)$$

где значение постоянной γ также будем находить. Первый интеграл (5.6.43) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \sigma(y-x) \frac{\partial P_4}{\partial x} + (rx-y-zx) \frac{\partial P_4}{\partial y} + \\ + (xy-bz) \frac{\partial P_4}{\partial z} + \gamma P_4 = 0, \end{aligned} \quad (5.6.44)$$

из которого приходим к системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов $E_0, A_0, \dots, A_2, S_0, \dots, S_5, B_0, \dots, B_5$. Решая эту систему, найдем три ранее полученных интеграла и еще три дополнительных первых интеграла.

Случай 4: $b = 6\sigma - 2$, σ — произвольная постоянная и $r = 2\sigma - 1$. Первый интеграл имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(2\sigma-1)^2}{\sigma} x^2 + \sigma y^2 - (4\sigma-2)xy + x^2 z - \frac{1}{4\sigma} x^4 \right) = \\ = C_4 \exp \{-4\sigma t\}. \end{aligned} \quad (5.6.45)$$

Случай 5: $b = 0$, $\sigma = \frac{1}{3}$, r — произвольная постоянная. Первый интеграл системы Лоренца принимает вид:

$$\left(x^2 z - r x^2 + \frac{1}{3} y^2 + \frac{2}{3} x y - \frac{3}{4} x^4\right) \exp \left\{ \frac{4}{3} t \right\} = C_5. \quad (5.6.46)$$

Случай 6: $b = 4$, $\sigma = 1$ и r — произвольная постоянная. Первый интеграл системы Лоренца в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(4(r-1)z - r x^2 - y^2 + 2xy - x^2 z + \frac{1}{4} x^4\right) = \\ = C_6 \exp \{-4t\}. \end{aligned} \quad (5.6.47)$$

Полученные первые интегралы используются при построении общих решений системы уравнений Лоренца для точно решаемых случаев.

5.6.3. Точно решаемые случаи системы Лоренца

Как сказано выше, в зависимости от значений параметров σ , r и b , система уравнений Лоренца (5.6.1) может оказаться как точно решаемой, так и неинтегрируемой [39].

В предельном случае при $r \rightarrow \infty$ система уравнений Лоренца становится консервативной точно решаемой системой уравнений, и она приводится к уравнению для эллиптической функции Якоби

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{x^3}{2} + (c_1 + 1)x. \quad (5.6.48)$$

Показано, что система уравнений Лоренца проходит тест Пенлеве в четырех случаях [148]: 1) $b = 2$, $\sigma = 1$, $r = \frac{1}{9}$; 2) $b = 1$, $\sigma = \frac{1}{2}$, $r = 0$; 3) $\sigma = 0$ и 4) $b = 0$, $\sigma = 1$, r — произвольная постоянная. Общее решение системы уравнений во всех этих случаях зависит от трех произвольных постоянных.

В первом случае система уравнений принимает вид

$$x_t = y - x, \quad (5.6.49)$$

$$y_t = -x z + \frac{1}{9}x - y, \quad (5.6.50)$$

$$z_t = x y - 2z. \quad (5.6.51)$$

Из (5.6.49) следует

$$y = x_t + x. \quad (5.6.52)$$

Подставляя (5.6.52) в (5.6.51), находим

$$z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{9}c_3^3 e^{-2t}, \quad (5.6.53)$$

где c_3 — произвольная постоянная. Принимая во внимание (5.6.52) и (5.6.53), из (5.6.50) имеем уравнение

$$x_{tt} + 2x_t + \frac{1}{2}x^3 + \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}c_3^3 e^{-2t}x = 0. \quad (5.6.54)$$

Используя замену переменных

$$x(t) = \frac{4ic_3}{3}e^{-\frac{2}{3}t}X(\tau), \quad \tau = c_3 e^{-\frac{2}{3}t}, \quad (5.6.55)$$

уравнение (5.6.54) приводится ко второму уравнению Пенлеве

$$X_{\tau\tau} = 2X^3 + \tau X. \quad (5.6.56)$$

Во втором случае система уравнений Лоренца принимает вид:

$$x_t = \frac{1}{2}(y - x), \quad (5.6.57)$$

$$y_t = -y - zx, \quad (5.6.58)$$

$$z_t = xy - z. \quad (5.6.59)$$

Подставляя y из (5.6.57) в (5.6.59), находим

$$z = c_1 e^{-t} + x^2. \quad (5.6.60)$$

С другой стороны, сравнивая (5.6.58) и (5.6.59), получим

$$y^2 + z^2 = c_2 e^{-2t}. \quad (5.6.61)$$

Принимая во внимание (5.6.57), из (5.6.60) и (5.6.61) имеем

$$(2x_t + x)^2 + (c_1 e^{-t} + x^2)^2 = c_2 e^{-2t}. \quad (5.6.62)$$

Используя новые переменные

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} X(\tau), \quad \tau = e^{-\frac{t}{2}}, \quad (5.6.63)$$

из (5.6.62) приходим к уравнению

$$X_\tau^2 + X^4 + (c_1^2 - c_2) + 2c_1 X^2 = 0, \quad (5.6.64)$$

которое заменой $\omega = X^2$ приводится к уравнению для эллиптической функции Якоби

$$\omega_\tau^2 + 4\omega^3 + 4(c_1^2 - c_2)\omega + 8c_1\omega^2 = 0. \quad (5.6.65)$$

В третьем случае система уравнений становится линейной.

В четвертом случае система уравнений Лоренца (5.6.1) принимает вид:

$$x_t = \frac{1}{3}(y - x), \quad (5.6.66)$$

$$y_t = rx - y - xz, \quad (5.6.67)$$

$$z_t = xy. \quad (5.6.68)$$

Из (5.6.66) имеем

$$y = 3x_t + x. \quad (5.6.69)$$

Подставляя (5.6.69) в (5.6.67) и (5.6.68), получим систему уравнений

$$3x_{tt} + 4x_t + x - rx + xz = 0, \quad (5.6.70)$$

$$z_t = 3xx_t + x^2. \quad (5.6.71)$$

Подставляя $z(t)$ из (5.6.70) в уравнение (5.6.71) и умножая полученное выражение на x^2 , приходим к уравнению:

$$3\frac{d}{dt}\left(xx_{tt} - x_t^2 + \frac{1}{4}x^4\right) + 4\left(xx_{tt} - x_t^2 + \frac{1}{4}x^4\right) = 0, \quad (5.6.72)$$

откуда находим первый интеграл

$$xx_{tt} - x_t^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{4c_1^4}{81}e^{-\frac{4}{3}t} = 0, \quad (5.6.73)$$

где c_1 — произвольная постоянная. Полагая в (5.6.73)

$$x(t) = \frac{2ic_1}{3}e^{-\frac{t}{3}}X(\tau), \quad \tau = c_1, e^{-\frac{t}{3}}, \quad (5.6.74)$$

получим третье уравнение Пенлеве

$$X_{\tau\tau} - \frac{X_{\tau}^2}{X} + \frac{X_{\tau}}{\tau} - X^3 - \frac{1}{X} = 0. \quad (5.6.75)$$

Таким образом, во всех четырех случаях, в которых система уравнений Лоренца (5.6.1) проходит тест Пенлеве, она становится точно решаемой.

5.6.4. Точные решения системы уравнений Лоренца

Для построения точных решений системы Лоренца применим метод простейших уравнений [124, 130].

В качестве простейшего уравнения используем уравнение Риккати

$$Y_t = -Y^2 + pY + q, \quad (5.6.76)$$

где p и q — постоянные, значения которых требуется найти.

Будем искать решение системы Лоренца (5.6.4) в виде

$$x(t) = A_0 + A_1 Y(t). \quad (5.6.77)$$

Подставляя (5.6.77) в уравнение (5.6.4) и учитывая соотношение (5.6.76), находим значения коэффициентов разложения (5.6.77) в виде

$$A_1 = \mp 2i, \quad A_0 = \pm \frac{i}{3} (3p + 2b + 1 - 3\sigma). \quad (5.6.78)$$

Кроме того, находим

$$b_1 = 2\sigma, \quad b_2 = 1 - 3\sigma. \quad (5.6.79)$$

В случае $b = b_1$ имеем

$$q = \frac{19\sigma^3 + 3\sigma^2(36r - 23) + 3\sigma(15p^2 + 7) - 9p^2 + 1}{36(1 - 5\sigma)}. \quad (5.6.80)$$

Дополнительно имеем уравнение

$$\sigma(\sigma + 1)(7\sigma + 1)(2\sigma^2 - 5\sigma + 9\sigma r + 2) = 0. \quad (5.6.81)$$

Полагая $\sigma = -1$, мы получаем, что r — произвольная постоянная, однако при $\sigma \neq -1$, имеем

$$r = \frac{5\sigma - 2\sigma^2 - 2}{9\sigma}. \quad (5.6.82)$$

Решение для $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = ip + \frac{i}{3}(1 + \sigma) \mp 2iY(t), \quad (5.6.83)$$

где $Y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$Y_t = -Y^2 + pY + \frac{1}{36}(1 + \sigma)^2 - \frac{p^2}{4}. \quad (5.6.84)$$

Решение уравнения (5.6.84) имеет вид

$$Y(t) = \frac{(1 + \sigma)}{6} \tanh \left\{ \frac{(1 + \sigma)}{6} t + \varphi_0 \right\}, \quad (5.6.85)$$

где φ_0 — произвольная постоянная.

При $b = b_2$ получаем значение r

$$r = 3(4\sigma - 1) \quad (5.6.86)$$

и параметр q уравнения (5.6.76) в виде

$$q = \frac{1}{4}(1 - 3\sigma)^2 - \frac{1}{4}p^2. \quad (5.6.87)$$

Таким образом, имеем решение

$$x(t) = ip + i(1 - 3\sigma) + 2iY(t), \quad (5.6.88)$$

где $Y(t)$ — решение уравнения

$$Y_t = -Y^2 + pY + \frac{1}{4}(1 - 3\sigma)^2 - \frac{p^2}{4}. \quad (5.6.89)$$

Решение уравнения (5.6.89) имеет вид

$$Y(t) = \frac{(1 - 3\sigma)}{2} \tanh \left\{ \frac{(1 - 3\sigma)}{2} t + \varphi_0 \right\}, \quad (5.6.90)$$

где φ_0 — произвольная постоянная.

В качестве второго простейшего уравнения используем уравнение в виде

$$Q_t^2 = -6Q^4 + nQ^2. \quad (5.6.91)$$

Будем искать решение системы уравнений Лоренца в виде

$$x(t) = A_0 + A_1 \frac{Q_t}{Q}. \quad (5.6.92)$$

Подставляя (5.6.92) в уравнение (5.6.4) и приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях $Q(z)$ и Q_z , получаем цепочку алгебраических уравнений, решая которые, находим значения коэффициентов

$$A_1 = \pm 2i, \quad A_0 = \mp \frac{i}{3}(3\sigma - 2b - 1). \quad (5.6.93)$$

Дополнительно имеем уравнение

$$(3\sigma + b - 1)(2\sigma - b) = 0. \quad (5.6.94)$$

Решив уравнение (5.6.94), получаем значения параметров b в виде

$$b_1 = 2\sigma, \quad b_2 = 1 - 3\sigma. \quad (5.6.95)$$

Рассмотрим первый случай: $b = b_1$. Имеем

$$r = \frac{69\sigma^2 + 36n - 19\sigma^3 - 180\sigma n - 21\sigma - 1}{108\sigma^2} \quad (5.6.96)$$

и еще два значения n в виде

$$n_1 = \frac{1}{36}(1 + \sigma)^2, \quad n_2 = -\frac{1}{36}(1 + 2\sigma + \sigma^2 - 36n). \quad (5.6.97)$$

Кроме того, приходим к уравнению относительно σ в виде

$$(1 + \sigma)(7\sigma + 1)(1 + \sigma^2 + 2\sigma - 36n) = 0. \quad (5.6.98)$$

Полагая $\sigma \neq -1$, имеем

$$r = \frac{5\sigma - 2\sigma^2 - 2}{9\sigma}. \quad (5.6.99)$$

Решение $x(t)$ имеет вид:

$$x(t) = \pm \frac{i}{3}(1 + \sigma) \pm \frac{2iQ_t}{Q}, \quad (5.6.100)$$

где решение

$$Q(t) = \frac{(1 + \sigma)}{2} \cosh^{-1} \left\{ \frac{(1 + \sigma)}{2} t + \varphi_0 \right\} \quad (5.6.101)$$

(φ_0 — произвольная постоянная) удовлетворяет уравнению

$$Q_t^2 = -6Q^4 + \frac{1}{36}Q^2(1 + \sigma)^2 \quad (5.6.102)$$

В случае $b = b_2$ получаем значение

$$r = 3(4\sigma - 1), \quad (5.6.103)$$

и параметр n уравнения (5.6.91) в виде

$$n_1 = \frac{1}{4}(1 - 3\sigma)^2, \quad n_2 = -\frac{3}{4}(1 - 18\sigma + 27\sigma^2). \quad (5.6.104)$$

Кроме того, приходим к уравнению относительно σ в виде

$$\sigma(3\sigma - 1)(4n - 9\sigma^2 + 6\sigma - 1) = 0. \quad (5.6.105)$$

При $\sigma = 0$ и $\sigma = \frac{1}{3}$ имеем точно решаемые случаи системы уравнений Лоренца, но если $n = n_1$, то получаем дополнительные точные решения в виде

$$x(t) = \pm i(3\sigma - 1) \pm \frac{2iQ_t}{Q}, \quad (5.6.106)$$

где $Q(t)$ — решение уравнения

$$Q_t = -6Q^4 + \frac{1}{4}Q^2(1 - 3\sigma)^2. \quad (5.6.107)$$

Это решение можно представить в виде:

$$Q(t) = \frac{(1 - 3\sigma)}{2} \cosh^{-1} \left\{ \frac{(1 - 3\sigma)}{2} t + \varphi_0 \right\}, \quad (5.6.108)$$

где φ_0 — произвольная постоянная.

Используя простейшие уравнения, мы получили точные решения системы уравнений Лоренца в виде двух уединенных волн для различных значений параметров b и r :

$$b = 2\sigma, \quad r = \frac{5\sigma - 2\sigma^2 - 2}{9\sigma} \quad (5.6.109)$$

и

$$b = 1 - 3\sigma, \quad r = 3(4\sigma - 1). \quad (5.6.110)$$

При этих значениях параметров система уравнений Лоренца имеет однопараметрические точные решения.

5.7. Аналитические свойства системы уравнений Хенона—Хейлеса

5.7.1. Тест на свойство Пенлеве для системы уравнений Хенона—Хейлеса

Система уравнений Хенона—Хейлеса имеет вид [104]:

$$\begin{aligned}x_{tt} &= -x - 2\delta xy, \\ y_{tt} &= -\beta y + \gamma y^2 - \delta x^2.\end{aligned}\tag{5.7.1}$$

Проверим, обладает ли эта система уравнений свойством Пенлеве [39]. Полагая

$$x = x_0 (t - t_0)^p, \quad y = y_0 (t - t_0)^r \tag{5.7.2}$$

и подставляя (5.7.2) в ведущие члены (5.7.1), имеем соотношения:

$$p(p-1)x_0(t-t_0)^{p-2} = -2\delta x_0 y_0 (t-t_0)^{p+r}, \tag{5.7.3}$$

$$r(r-1)y_0(t-t_0)^{r-2} = \gamma y_0^2 (t-t_0)^{2r} - \delta x_0^2 (t-t_0)^{2p}. \tag{5.7.4}$$

Предполагая равенство степеней в (5.7.3) и (5.7.4), получаем два возможных случая:

$$\begin{aligned}1) \quad & p = -2, \quad x_0 = \pm (3/\delta) (2 + \lambda^{-1})^{1/2}, \quad \lambda = \delta/\gamma, \\ & r = -2, \quad y_0 = -3/\delta;\end{aligned}\tag{5.7.5}$$

$$2) \quad p_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (1 - 48\lambda)^{1/2}, \quad r = -2, \quad y_0 = 6/\gamma; \tag{5.7.6}$$

x_0 — произвольная постоянная.

Наименьшая степень в (5.7.4) равна -4 , поэтому степень разности $(t - t_0)$ во втором слагаемом правой части (5.7.4) должна быть больше, чем -4 , что приводит при $\lambda > -1/2$ к существованию лишь одного семейства решений.

Система уравнений (5.7.1) может пройти тест Пенлеве при условии, что степени p и r в (5.7.2) целые. Это условие выполняется при $\lambda = -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{5}{3}, \dots$, когда квадратный корень в

(5.7.6) извлекается. В случае $\lambda > 1/48$ корни p_{\pm} в (5.7.6) становятся комплексными, и система уравнений (5.7.1) не проходит тест Пенлеве. В этом случае стандартная система уравнений Хенона—Хейлеса не является точно решаемой.

Для поиска индексов Фукса в первом случае подставляем

$$x = \pm (3/\delta) (2 + \lambda^{-1})^{1/2} (t - t_0)^{-2} + x_j (t - t_0)^{j-2}, \quad (5.7.7)$$

$$y = - (3/\delta) (t - t_0)^{-2} + y_j (t - t_0)^{j-2} \quad (5.7.8)$$

в ведущие члены системы уравнений (5.7.1)

$$\ddot{x} = -2\delta xy, \quad (5.7.9)$$

$$\ddot{y} = -\delta x^2 + \gamma y^2. \quad (5.7.10)$$

Приравнивая нулю выражения при первых степенях x_j и y_j , получаем систему уравнений, которая приводит к уравнению для вычисления индексов Фукса

$$\begin{vmatrix} (3-j)(2-j) - 6 & \pm 6(2 + 1/\lambda)^{1/2} \\ \pm 6(2 + 1/\lambda)^{1/2} & (3-j)(2-j) + 6/\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.7.11)$$

Полагая $\theta = (3-j)(2-j)$ в (5.7.11), получим решения:

$$\theta = 12, \quad \theta = -6(1 + 1/\lambda). \quad (5.7.12)$$

Принимая во внимание (5.7.12), находим индексы Фукса в виде

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 6, \quad (5.7.13)$$

$$j_{3,4} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} [1 - 24(1 + 1/\lambda)]^{1/2}. \quad (5.7.14)$$

При $\lambda > 0$ и $\lambda < -24/23$ из (5.7.14) следует, что корни j_3 и j_4 — комплексные и, следовательно, система уравнений (5.7.1) не проходит тест Пенлеве.

Подставляя выражения, аналогичные (5.7.7) и (5.7.8), в ведущие члены системы уравнений (5.7.1)

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\delta xy, \\ \ddot{y} &= \gamma y^2,\end{aligned}\tag{5.7.15}$$

получаем индексы Фукса во втором случае в виде

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 0, \quad j_3 = 6, \quad j_4 = \mp(1 - 48\lambda)^{1/2}.\tag{5.7.16}$$

В случае $\lambda > 1/48$ корень j_4 является комплексным, и система уравнений не проходит тест Пенлеве. При $-1/2 < \lambda < 1/48$ решения системы уравнений Хенона—Хейлеса могут иметь четыре произвольных коэффициента. При этом p и $j_4 = (1 - 48\lambda)^{1/2}$ — действительные. Если $\lambda = 0$, то система уравнений (5.7.1) является интегрируемой, поскольку каждое из уравнений интегрируется отдельно.

Система уравнений (5.7.1) может пройти тест Пенлеве при условии, что p , r в (5.7.2) и индексы Фукса (5.7.14) и (5.7.16) — целые. Выполнение этого условия возможно при следующих значениях λ :

$$\lambda = -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -1.$$

Анализ произвольных постоянных при $\lambda = -1$ показал, что система уравнений (5.7.1) проходит тест Пенлеве при $\beta = 1$.

В случае $\lambda = -1/2$ значение x_0 в (5.7.2) становится равным нулю. Поскольку индексы Фукса в этом случае равны $-1, 0, 5, 6$, то система уравнений не обладает свойством Пенлеве.

При $\lambda = -1/6$ целочисленные индексы Фукса определяются формулами (5.7.14) и (5.7.16). Проверка произвольных постоянных для разложения каждого семейства решений показывает, что система уравнений (5.7.1) при этом условии проходит тест Пенлеве [154].

Интересному случаю соответствует значение $\lambda = -1/16$, когда наименьшие степени в (5.7.2) имеют вид

$$x = x_0 t^{-1/2}, \quad y = y_0 t^{-2}.\tag{5.7.17}$$

Индексы Фукса при этом целые

$$j = -1, 0, 2, 6$$

и соответствуют четырем произвольным постоянным в разложении решения в ряд Лорана. Указанное значение λ также соответствует точно решаемому случаю модели Хенона—Хейлеса при $\beta = 16$.

5.7.2. Точные решения системы уравнений Хенона—Хейлеса

Рассмотрим решения системы уравнений Хенона — Хейлеса при тех значениях параметров, при которых система уравнений проходит тест Пенлеве.

Анализ системы уравнений

$$x_{tt} = -x - 2\delta xy; \quad (5.7.18)$$

$$y_{tt} = -\beta y + \gamma y^2 - \delta x^2 \quad (5.7.19)$$

показал, что (5.7.18) и (5.7.19) проходят тест Пенлеве в трех случаях [152, 153]:

$$1) \lambda = \frac{\delta}{\gamma} = -1, \quad \beta = 1, \quad 2) \lambda = \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{1}{6}$$

$$3) \lambda = \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{1}{16}, \quad \beta = 16.$$

В первом случае из (5.7.18) и (5.7.19) имеем

$$\ddot{x} = -x - 2\delta xy, \quad (5.7.20)$$

$$\ddot{y} = -y - \delta(x^2 + y^2). \quad (5.7.21)$$

Складывая и вычитая уравнения (5.7.20) и (5.7.21) и используя переменные $u = x + y$ и $v = x - y$, эту систему уравнений сводим к двум уравнениям:

$$\ddot{u} = -u - \delta u^2, \quad (5.7.22)$$

$$\ddot{v} = -v + \delta v^2. \quad (5.7.23)$$

Решения уравнений (5.7.22) и (5.7.23) хорошо известны. Они выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса. Поэтому $\beta = 1$ является простейшим примером точного решения системы (5.7.18) и (5.7.19).

При $\lambda = -1/6$ для решений системы уравнений (5.7.18) и (5.7.19) имеем усеченные разложения [152, 153]

$$x = \frac{x_0}{\varphi} + x_1, \quad (5.7.24)$$

$$y = \frac{y_0}{\varphi^2} + \frac{y_1}{\varphi} + y_2. \quad (5.7.25)$$

Подставляя (5.7.24) и (5.7.25) в (5.7.18) и (5.7.19) при $\lambda = -1/6$ и приравнивая нулю выражения при одинаковых степенях φ , получаем

$$y_0 = -\varphi_t^2, \quad y_1 = \varphi_{tt}, \quad (5.7.26)$$

$$y_2 = \frac{1}{12} \left(4m - \beta - 3v - \frac{3\varphi_{tt}^2}{\varphi_t^2} \right), \quad (5.7.27)$$

$$x_0^2 = v\varphi_t^2, \quad x_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_t}{v} + \frac{\varphi_{tt}}{\varphi_t} \right) v^{1/2}, \quad (5.7.28)$$

$$v = \{\varphi; t\} + m, \quad (5.7.29)$$

$$v_{tt} + \frac{3}{2}v^2 + 2 \left(\frac{\beta}{3} - 2 + \frac{2m}{3} \right) v + \frac{\beta^2}{6} - \frac{2m^2}{3} = 0, \quad (5.7.30)$$

где m — произвольная постоянная, $\{\varphi; t\}$ — производная Шварца.

$$\{\varphi; t\} = \frac{\varphi_{ttt}}{\varphi_t} - \frac{3}{2} \frac{\varphi_{tt}^2}{\varphi_t^2}. \quad (5.7.31)$$

Из (5.7.30) после умножения на v_t приходим к уравнению

$$v_t^2 + v^3 + 2 \left(\frac{\beta}{3} - 2 + \frac{2m}{3} \right) v^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\beta^2}{2} - 2m^2 \right) = C_1, \quad (5.7.32)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Решение уравнения (5.7.32) выражается через эллиптическую функцию Якоби. Это решение позволяет найти $\varphi(t)$ из (5.7.29), x_1 , y_2 , y_0 и x_0 , что приводит к решениям системы (5.7.18) и (5.7.19) при $\lambda = -1/6$.

В третьем случае $\lambda = -1/16$, $\beta = 16$ разложения решений системы (5.7.18) (5.7.19) имеют вид

$$x = \varphi^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} x_j \varphi^j, \quad y = \varphi^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} y_j \varphi^j \quad (5.7.33)$$

с индексами Фукса, равными $-1, 0, 2, 6$.

Сделав замену

$$\Psi = x^2, \quad (5.7.34)$$

приходим к системе уравнений (полагаем $\delta = 1, \gamma = -16, \beta = 16$):

$$\Psi \Psi_{tt} = \frac{1}{2} \Psi_t^2 - 2\Psi^2 - 4y\Psi^2, \quad (5.7.35)$$

$$y_{tt} = -16y - 16y^2 - \Psi. \quad (5.7.36)$$

Усеченные разложения для (5.7.35) и (5.7.36) имеют вид:

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{\varphi} + \Psi_1, \quad (5.7.37)$$

$$y = \frac{y_0}{\varphi^2} + \frac{y_1}{\varphi} + y_2. \quad (5.7.38)$$

Подставляя (5.7.37), (5.7.38) в (5.7.35) и (5.7.36) и приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях φ , получим:

$$\Psi_0 = -\frac{3}{8} \varphi_t v_t, \quad \Psi_1 = \frac{3}{16} \left(2v_{tt} + v_t \frac{\varphi_{tt}}{\varphi_t} \right),$$

$$y_0 = -\frac{3}{8} \varphi_t^2, \quad y_1 = \frac{3}{8} \varphi_{tt}, \quad (5.7.39)$$

$$y_2 = -\frac{3}{8} \left(\frac{v}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \frac{\varphi_{tt}^2}{\varphi_t^2} \right),$$

где

$$v = \{\varphi; t\}, \quad v_{tt} + \frac{1}{4}v^2 = 16. \quad (5.7.40)$$

Решение второго уравнения из (5.7.40) выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса, а из первого уравнения (5.7.40) при известной $v(t)$ находятся решения $\varphi(t)$, а затем Ψ_0, Ψ_1, y_0, y_1 и y_2 по формулам (5.7.39).

Таким образом, система уравнений Хенона—Хейлеса имеет точные решения во всех случаях, для которых исходная система проходит тест Пенлеве.

5.8. Автомоделные решения задач нелинейной теплопроводности

5.8.1. Автомоделные решения задачи о распространении тепловой волны из мгновенного точечного источника

Интерес к задачам нелинейной теплопроводности возник более пятидесяти лет назад в связи с изучением процесса распространения фронта тепловой волны, образовавшейся при ядерном взрыве [26]. Впервые эта задача рассматривалась в работе [27], в которой, в частности, найдено точное решение задачи о распространении тепла из мгновенного точечного источника. Похожие задачи рассматривались также при анализе процесса фильтрации газа в пористой среде [6, 7, 38], поскольку математическое описание обоих процессов аналогично.

Рассмотрим процесс распространения тепла из мгновенного точечного источника описываемого уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t \in (0, \infty). \quad (5.8.1)$$

Здесь T — температура среды, x — координата, t — время, χ — коэффициент температуропроводности среды, n — показатель, характеризующий электронную или лучистую теплопроводность.

Пусть в начальный момент времени в начале координат выделяется энергия E_0 . Для любого последующего момента выполняется закон сохранения энергии [27]

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx = E_0. \quad (5.8.2)$$

Будем искать решение задачи (5.8.1), (5.8.2), используя автомодельные переменные

$$T(x, t) = A t^m f(\theta), \quad \theta = \frac{B x}{t^p}. \quad (5.8.3)$$

Подставляя (5.8.3) в (5.8.2), получаем соотношение между A , B , m и p в виде:

$$p = -m, \quad A B = E_0 \quad (5.8.4)$$

и условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta = 1. \quad (5.8.5)$$

Поскольку

$$T_t = m t^{m-1} f(\theta) + A \theta p t^{m-1} f_\theta, \quad T_x = A B t^{2m} f_\theta, \quad (5.8.6)$$

то, учитывая (5.8.4), (5.8.6), из уравнения (5.8.1) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(n+2) \frac{d}{d\theta} \left(f^n \frac{df}{d\theta} \right) + \theta \frac{df}{d\theta} + f = 0. \quad (5.8.7)$$

В (5.8.3) используются следующие значения параметров A , B , m и p

$$\begin{aligned} A &= \chi^{-\frac{1}{n+2}} E_0^{\frac{2}{n+2}}, \quad B = \chi^{-\frac{1}{n+2}} E_0^{-\frac{2}{n+2}}, \\ m &= -\frac{1}{n+2}, \quad p = \frac{1}{n+2}. \end{aligned} \quad (5.8.8)$$

Таким образом, решение задачи (5.8.1) с условием (5.8.2) свелось к решению обыкновенного дифференциального уравнения (5.8.7) при условии (5.8.5).

Уравнение (5.8.7) можно один раз проинтегрировать

$$(n+2) \left(f^n \frac{df}{d\theta} \right) + \theta f = C_1. \quad (5.8.9)$$

Постоянную интегрирования C_1 в уравнении (5.8.9) следует положить равной нулю, поскольку производную $\frac{df}{d\theta}$ при $\theta = 0$ естественно считать равной нулю вследствие симметрии задачи при $x = 0$. При $C_1 = 0$ из уравнения (5.8.9) получаем уравнение

$$\frac{n+2}{n} \frac{df^n}{d\theta} + \theta = 0, \quad (5.8.10)$$

решение которого имеет вид

$$f(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2n+4} \right)^{\frac{1}{n}} (\alpha^2 - \theta^2)^{\frac{1}{n}}, & \theta \leq \alpha, \\ 0, & \theta > \alpha. \end{cases} \quad (5.8.11)$$

В (5.8.11) α — постоянная интегрирования, значение которой находится из закона сохранения энергии

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\theta) d\theta = 1. \quad (5.8.12)$$

Вычислив интеграл (5.8.12), получим значение α в виде

$$\alpha = \left(\frac{(n+2)^{1+n} 2^{1-n} \Gamma^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)}{n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma^n \left(\frac{1}{n} \right)} \right)^{\frac{1}{n+2}}. \quad (5.8.13)$$

Окончательное решение исходной задачи можно представить в виде

$$T(x, t) = \begin{cases} \frac{E_0^{\frac{2}{n+2}}}{(\chi t)^{\frac{1}{n+2}}} \left(\frac{n}{2n+4} \right)^{\frac{1}{n}} (\alpha^2 - \theta^2)^{\frac{1}{n}}, & \theta \leq \alpha, \\ 0, & \theta > \alpha, \end{cases} \quad (5.8.14)$$

где зависимость переменной θ от x и t определяется в соответствии с формулой

$$\theta = \frac{x}{(E_0^2 \chi t)^{\frac{1}{n+2}}}. \quad (5.8.15)$$

Решение (5.8.14) было получено Я.Б. Зельдовичем и А.С. Компанейцем [27]. Анализ решения (5.8.14) приводит к интересному выводу: в отличие от линейного уравнения теплопроводности при электронной и при лучистой теплопроводности скорость распространения фронта тепловой волны является конечной. Координата фронта распространения тепла может быть найдена из выражения

$$x = \alpha (E_0^2 \chi t)^{\frac{1}{n+2}}. \quad (5.8.16)$$

Скорость распространения тепла находится по формуле

$$c_0 = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha (E_0^2 \chi)^{\frac{1}{n+2}}}{(n+2)t^{\frac{n+1}{n+2}}}. \quad (5.8.17)$$

Аналогичные задачи могут быть решены для цилиндрически и сферически симметричных случаев распространения тепла при электронной и лучистой теплопроводности.

5.8.2. Приближенные решения задачи нелинейной теплопроводности при заданной температуре на границе

Рассмотрим процесс распространения тепла на полубесконечной прямой с помощью механизма электронной или лучистой теплопроводности при заданной температуре на границе [47].

Процесс описывается нелинейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in (0, \infty) \quad t \in (0, \infty), \quad (5.8.18)$$

при равной нулю температуре среды в начальный момент времени

$$u(x, t = 0) = 0, \quad x > 0, \quad (5.8.19)$$

и при изменяющейся по степенному закону от времени температуре на границе

$$u(x = 0, t) = u_0 t^k, \quad t > 0. \quad (5.8.20)$$

Уравнение (5.8.18) допускает преобразование сдвига по переменным x и t , поэтому вместо переменной t в граничном условии (5.8.20) можно использовать переменную $t + t_0$, где t_0 — произвольная постоянная.

При использовании разностных схем [34] численное решение указанной задачи в настоящее время получить не составляет трудностей. Однако представляет интерес построить аналитическое решение задачи (5.8.18)—(5.8.20).

Сделаем замену

$$u = v^{\frac{1}{n}}, \quad (5.8.21)$$

тогда, подставляя (5.8.21) в уравнение (5.8.18), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\chi}{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \chi v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (5.8.22)$$

Начальное условие для (5.8.22) запишется в виде

$$v(x, t = 0) = 0, \quad x > 0. \quad (5.8.23)$$

Граничное условие для (5.8.22) выражается, как и прежде, степенной функцией

$$v(x = 0, t) = v_0 t^m, \quad t > 0, \quad m = nk, \quad v_0 = u_0^n. \quad (5.8.24)$$

Задача (5.8.22)—(5.8.24) допускает группу преобразований растяжения по переменным x , t и v [6, 7], и поэтому решение этой задачи можно искать, используя автомодельные переменные.

Решение задачи (5.8.22)–(5.8.24) ищем в виде

$$v(x, t) = v_0 t^m f(z), \quad z = x / \sqrt{\chi v_0 t^{m+1}}. \quad (5.8.25)$$

Подставляя (5.8.25) в уравнение (5.8.22), имеем дифференциальное уравнение

$$f \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{n} \left(\frac{df}{dz} \right)^2 + \frac{z(m+1)}{2} \frac{df}{dz} - m f = 0. \quad (5.8.26)$$

Условия (5.8.23)–(5.8.24) для уравнения (5.8.22) переходят в краевые условия для уравнения (5.8.26)

$$f(z=0) = 1, \quad f(z \rightarrow \infty) = 0. \quad (5.8.27)$$

Решение краевой задачи (5.8.26), (5.8.27) будем искать при $m \neq -1$. Для определенности будем полагать $m > -1$.

Как показано выше в ряде задач нелинейной теплопроводности, скорость распространения тепла является конечной [6, 26]. Используя это предположение, будем искать решение краевой задачи (5.8.26), (5.8.27). Оно соответствует тому, что у решения уравнения (5.8.26) существует координата $z = \alpha$, такая, что

$$f(z = \alpha) = 0, \quad \frac{df}{dz} \neq 0. \quad (5.8.28)$$

Решение краевой задачи (5.8.26), (5.8.27) в этом случае становится обобщенным, у решения возникает скачок первой производной при $z = \alpha$. Будем искать решение краевой задачи (5.8.26)–(5.8.27) в виде

$$f(z) = \sum_{j=1}^N A_j (z - \alpha)^j, \quad z \leq \alpha. \quad (5.8.29)$$

Вследствие сказанного выше предполагаем, что $f(z) = 0$ при $z > \alpha$. Принимая во внимание (5.8.29), имеем

$$\frac{d^j f}{dz^j} = j! A_j. \quad (5.8.30)$$

Из дифференциального уравнения (5.8.26) получаем, что

$$\frac{1}{n} \frac{df}{dz} + \frac{\alpha(m+1)}{2} = 0, \quad (5.8.31)$$

откуда находим

$$A_1 = -\frac{\alpha n(m+1)}{2}. \quad (5.8.32)$$

Дифференцируя уравнение (5.8.26) по z , находим производные более высокого порядка от $f(z)$ и, следовательно, значения коэффициентов A_j .

Приближенное решение $f(z)$ с точностью до слагаемых четвертого порядка имеет вид:

$$f(z) = \sum_{i=1}^4 F_i(m, n) (\alpha - z)^i \alpha^{2-i}, \quad (5.8.33)$$

где

$$F_1(m, n) = \frac{1}{2} n(m+1), \quad F_2(m, n) = \frac{1}{4} \frac{(m-1)n}{1+n},$$

$$F_3(m, n) = -\frac{1}{12} \frac{(m-1)n(2m+n+mn)}{(m+1)(1+n)^2(2n+1)},$$

$$F_4(m, n) = \frac{1}{48} \frac{(m-1)n(2m+n+mn)(5mn-n+7m-3)}{(m+1)^2(1+n)^3(2n+1)(3n+1)}.$$

Значение координаты α , при котором функция $f(z)$ обращается в нуль, находится из граничного условия при $z = 0$. Обозначая $f(z=0) = \alpha^2 G(m, n)$, находим значение α из уравнения

$$\alpha^2 G(m, n) = 1. \quad (5.8.34)$$

При $m = 0$ (что соответствует $k = 0$) решение краевой задачи нелинейной теплопроводности с точностью до слагаемых четвертого порядка принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{2} n \alpha (\alpha - z) - \frac{1}{4} \frac{n (\alpha - z)^2}{n + 1} + \frac{1}{12} \frac{n^2 (\alpha - z)^3}{(n + 1)^2 (2n + 1) \alpha} + \\ + \frac{1}{48} \frac{n^2 (n + 3) (\alpha - z)^4}{(n + 1)^3 (2n + 1) (3n + 1) \alpha^2} + \dots \quad (5.8.35)$$

Значения α при некоторых значениях показателя нелинейности n решения (5.8.35) представлены в табл. 5.1 ($m = 0$).

Таблица 5.1

n	1	2	3	4	5	6	7
α	1,6161	1,0903	0,8705	0,7440	0,6598	0,5986	0,5517

Полагая $n = 1$ в решении (5.8.33), находим приближенное решение, которое было получено Г.И. Баренблаттом [6] при описании процесса фильтрации изотермического газа в пористой среде:

$$f(z) = \frac{1}{2} \alpha (m + 1) (\alpha - z) + \frac{1}{8} (m - 1) (\alpha - z)^2 - \\ - \frac{(m - 1) (3m + 1) (\alpha - z)^3}{144 (m + 1) \alpha} + \frac{(m - 1) (9m^2 - 1) (\alpha - z)^4}{1152 (m + 1)^2 \alpha^2} - \dots \quad (5.8.36)$$

Из решения (5.8.36) следует точное решение задачи об изотермической фильтрации газа при $n = 1$ и $m = k = -1/3$, имеющее вид

$$f(z) = \frac{1}{6} (\alpha^2 - z^2). \quad (5.8.37)$$

Представим приближенные решения краевой задачи нелинейной теплопроводности при $m = 0$ для наиболее важных значений показателей нелинейности.

При $m = 0$ и $n = 1$ из (5.8.35) получаем $\alpha = \pm 1,616125$. Задача (5.8.26)–(5.8.27) в этом случае описывает процесс изотермической фильтрации газа в пористой среде при постоянном давлении на входе в пласт. Приближенное решение этой задачи было найдено П. Я. Полубариновой-Кочиной [38]

$$f_1(z) = \frac{1}{2} \alpha (\alpha - z) - \frac{1}{8} (\alpha - z)^2 + \frac{1}{144} \frac{(\alpha - z)^3}{\alpha} + \frac{1}{1152} \frac{(\alpha - z)^4}{\alpha^2} + \dots \quad (5.8.38)$$

Приближенное решение задачи политропической ($n = 4/3$) фильтрации газа при постоянном давлении газа на границе пористой среды находится при $\alpha = \pm 0,371091$:

$$f_2(z) = \frac{2}{3} \alpha (\alpha - z) - \frac{1}{7} (\alpha - z)^2 + \frac{4}{539} \frac{(\alpha - z)^3}{\alpha} + \frac{13}{18865} \frac{(\alpha - z)^4}{\alpha^2} + \dots \quad (5.8.39)$$

В случае электронной проводимости в плазме ($n = 5/2$) имеем $\alpha = \pm 0,962766$. Приближенное решение уравнения нелинейной теплопроводности при постоянном граничном условии имеет вид:

$$f_3(z) = \frac{5}{4} \alpha (\alpha - z) - \frac{5}{28} (\alpha - z)^2 + \frac{25}{3528} \frac{(\alpha - z)^3}{\alpha} + \frac{275}{839664} \frac{(\alpha - z)^4}{\alpha^2} + \dots \quad (5.8.40)$$

Для нелинейной теплопроводности газа при многократной ионизации газа ($n = 9/2$) получаем $\alpha = \pm 0,698232$. Приближенное решение с учетом шести слагаемых выражается формулой

$$f_4(z) = \frac{9}{4} \alpha (\alpha - z) - \frac{9}{44} (\alpha - z)^2 + \frac{27}{4840} \frac{(\alpha - z)^3}{\alpha} + \frac{81}{617584} \frac{(\alpha - z)^4}{\alpha^2} - \dots \quad (5.8.41)$$

При многократной ионизации газа, соответствующей случаю $n = 11/2$, находим $\alpha = \pm 0,627021$ и приближенное решение в виде:

$$f_5(z) = \frac{11}{4} \alpha (\alpha - z) - \frac{11}{52} (\alpha - z)^2 + \frac{121}{24336} \frac{(\alpha - z)^3}{\alpha} + \\ + \frac{2057}{22145760} \frac{(\alpha - z)^4}{\alpha^2} - \dots \quad (5.8.42)$$

В случае полностью ионизованного газа, для которого механизм излучения и поглощения света является тормозным ($n = 13/2$), имеем $\alpha = \pm 0,573740$. Приближенное решение в этом случае выражается формулой

$$f_6(z) = \frac{13}{4} \alpha (\alpha - z) - \frac{13}{60} (\alpha - z)^2 + \frac{169}{37800} \frac{(\alpha - z)^3}{\alpha} + \\ + \frac{3211}{46494000} \frac{(\alpha - z)^4}{\alpha^2} - \dots \quad (5.8.43)$$

В случае $m = 1$ решение задачи нелинейной теплопроводности становится точным

$$f(z) = \alpha n (\alpha - z), \quad z \in [0, \alpha]. \quad (5.8.44)$$

Значение α в этом случае может быть найдено из граничного условия

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (5.8.45)$$

При $m = 2$ и в случае целочисленных значений показателя n величина α представлены в табл. 5.2 ($m = 2$).

Таблица 5.2

n	1	2	3	4	5	6	7
α	0,7877	0,5629	0,4623	0,4019	0,3603	0,3295	0,3055

Из приближенного решения находится еще одно точное решение задачи нелинейной теплопроводности при $m = -\frac{n}{n+2}$:

$$f(z) = \frac{n}{2(n+2)} (\alpha^2 - z^2), \quad z \in [0, \alpha], \quad (5.8.46)$$

где α — произвольная постоянная. Однако для изучаемой краевой задачи это решение может быть также получено из граничного условия. В этом случае значение α находится по формуле

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{2(n+2)}{n}}. \quad (5.8.47)$$

Приближенные решения исходных задач нелинейной теплопроводности с учетом полученных решений для $f(z)$ находятся по формуле

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 t^k \left(f \left(\frac{x}{\sqrt{\chi u_0^n t^{kn+1}}} \right) \right)^{\frac{1}{n}}, & 0 \leq x \leq x_*, \\ 0, & x_* \leq x < \infty, \end{cases} \quad (5.8.48)$$

$$x_* = \alpha \sqrt{\chi u_0^n t^{kn+1}}.$$

Координата фронта распространения тепла при заданных значениях k и n и при вычисленном значении α определяется формулой

$$x_* = \alpha \sqrt{\chi u_0^n t^{kn+1}}. \quad (5.8.49)$$

Скорость распространения фронта нелинейной теплопроводности находится в результате дифференцирования координаты фронта по времени

$$V = \frac{dx_*}{dt} = 0,5 \alpha (kn + 1) \sqrt{\chi u_0^n t^{kn-1}}. \quad (5.8.50)$$

Из формулы (5.8.50) следует, что при $m = kn = 1$ скорость распространения тепла становится постоянной. В случае $-1 < kn < 1$ скорость распространения уменьшается, а при $1 < kn$ скорость — увеличивается.

Необходимые оценки сходимости полученного решения можно найти в книге [65]. Подставляя решение (5.8.33) в уравнение (5.8.26), приходим к зависимости $Q(z, m, n)$, которая является мерой отклонения полученного приближенного решения от точного. Оказалось, что при фиксированных значениях m и n величина $Q(z, m, n)$ убывает с увеличением $z \in [0, \alpha]$. При $m = 0$ и $n = 1$ максимальное отклонение равно $Q(z = 0) = 10^{-3}$. С увеличением n отклонение $Q(z = 0)$ уменьшается. Численное решение краевой задачи (5.8.26), (5.8.27) с использованием метода Рунге—Кутты четвертого порядка не показало заметного отклонения численного решения от приближенного, построенного с учетом четырех слагаемых.

5.8.3. *Приближенные решения задачи нелинейной теплопроводности при экспоненциальной зависимости температуры от времени на границе*

Приближенные решения задачи о распространении тепловой волны могут быть получены и в случае зависимости температуры от времени при $x = 0$ в виде экспоненциальной функции

$$u(x = 0, t) = u_0 \exp(\beta t), \quad t > 0. \quad (5.8.51)$$

Рассмотрим решение задачи (5.8.18), (5.8.19), (5.8.51). Используя замену переменной (5.8.21), получаем задачу (5.8.22), (5.8.23) для функции $v(x, t)$ при граничном условии

$$v(x = 0, t) = v_0 \exp(n \beta t), \quad t > 0, \quad v_0 = u_0^n. \quad (5.8.52)$$

Ищем решение в виде

$$v(x, t) = v_0 \exp(n \beta t) g(\theta), \quad \theta = x (\chi v_0 n \beta)^{-1} \exp(-0,5 n \beta t). \quad (5.8.53)$$

Задача (5.8.18), (5.8.19), (5.8.51) в автомодельных переменных сводится к решению уравнения

$$g \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \frac{1}{n} \left(\frac{dg}{d\theta} \right)^2 + \frac{\theta}{2} \frac{dg}{d\theta} - g = 0 \quad (5.8.54)$$

с граничными условиями

$$g(\theta = 0) = 1, \quad g(\theta = \infty) = 0. \quad (5.8.55)$$

Приближенное решение задачи (5.8.54) и (5.8.55) ищется аналогично предыдущей задаче. Решение с учетом слагаемых до пятого порядка имеет вид

$$g(\theta) = \sum_i^5 P_i(n) (\alpha - \theta)^i \alpha^{2-i}, \quad (5.8.56)$$

где

$$P_1(n) = \frac{1}{2} n, \quad P_2(n) = \frac{1}{4} \frac{n}{n+1}, \quad P_3(n) = -\frac{1}{12} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2 (2n+1)},$$

$$P_4(n) = \frac{1}{48} \frac{n(n+2)(5n+7)}{(n+1)^3 (2n+1)(3n+1)},$$

$$P_5(n) = -\frac{1}{240} \frac{n(n+2)(102n^3 + 317n^2 + 303n + 82)}{(n+1)^4 (2n+1)^2 (3n+1)(4n+1)}.$$

В случае $n = -2$ из приближенного решения (5.8.56) получаем точное решение уравнения (5.8.54) в виде

$$g(\theta) = \alpha (\theta - \alpha) + \frac{1}{2} (\theta - \alpha)^2, \quad (5.8.57)$$

где α — произвольная постоянная.

Подставляя решение (5.8.56) в уравнение (5.8.54), получаем зависимость $Q_1(\theta, n)$, которая также является мерой отклонения полученного приближенного решения от точного. Зависимость $Q_1(\theta, n)$ при фиксированном значении n также убывает с увеличением $\theta \in [0, \alpha]$. При $n = 1$ имеем $\alpha = \pm 1,280610$, максимальное отклонение равно $Q_1(\theta = 0) = 0,0131$. С увеличением n отклонение $Q_1(\theta = 0)$ уменьшается. В случае $n = 2$ получаем $\alpha = \pm 0,930775$, максимальное отклонение равно $Q_1(\theta = 0) = 0,0002641$.

5.8.4. Автомодельные решения плоской задачи при заданном потоке на границе

Рассмотрим задачу о распространении тепла с учетом механизма электронной и лучистой теплопроводности при заданном потоке в виде степенной функции в начале координат [51]. Постановка плоской задачи имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (5.8.58)$$

При $x = 0$ задается поток тепла, зависящий от времени по степенному закону

$$T^n \frac{\partial T}{\partial x} = -q_0 t^k, \quad t > 0. \quad (5.8.59)$$

В начальный момент температуру среды полагаем равной нулю:

$$T(r, t = 0) = 0, \quad r > 0. \quad (5.8.60)$$

Задача (5.8.58)–(5.8.60) является автомодельной. Сделаем в (5.8.58) замену

$$T = v^{\frac{1}{n}},$$

тогда уравнение (5.8.58) принимает вид

$$v_t = \kappa v v_{xx} + \frac{\kappa}{n} v_x^2, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (5.8.61)$$

Граничное и начальное условия для (5.8.61) есть

$$v^{\frac{1}{n}} \frac{\partial v}{\partial x} = -q_0 n t^k, \quad t > 0. \quad (5.8.62)$$

$$v(r, t = 0) = 0, \quad r > 0. \quad (5.8.63)$$

Далее рассмотрим решение задачи (5.8.61)—(5.8.63).

Решение будем искать в виде

$$v(x, t) = A t^m f(\theta), \quad \theta = \frac{Bx}{t^p}. \quad (5.8.64)$$

Подставляя (5.8.64) в уравнение (5.8.61) и полагая

$$p = \frac{m+1}{2}, \quad \kappa A B^2 = 1, \quad (5.8.65)$$

получаем уравнение

$$f f_{\theta\theta} + \frac{1}{n} f_{\theta}^2 + \frac{\gamma}{\theta} f f_{\theta} + \frac{m+1}{2} \theta f_{\theta} - m f = 0. \quad (5.8.66)$$

Подставляя (5.8.64) в граничное условие (5.8.62) и учитывая, что

$$\frac{m(n+1)}{n} - \frac{(m+1)}{2} = k, \quad (5.8.67)$$

$$q_0 n = B A^{\frac{n+1}{n}}, \quad (5.8.68)$$

приходим к граничному условию для (5.8.66) в виде:

$$\frac{d f^{\frac{n}{n+1}}}{d\theta} = -1.$$

Второе граничное условие для уравнения (5.8.66) находится из начального условия (5.8.63)

$$f(\theta \rightarrow \infty) = 0.$$

Значения постоянных A , B , m в (5.8.64) находятся из (5.8.65), (5.8.67) и (5.8.68):

$$A = \kappa^{\frac{n}{n+2}} q_0^{\frac{2n}{n+2}} n^{\frac{2n}{n+2}}, \quad B = \kappa^{-\frac{n+1}{n+2}} q_0^{-\frac{n}{n+2}} n^{-\frac{n}{n+2}},$$

$$m = \frac{n(2k+1)}{n+2}. \quad (5.8.69)$$

Учитывая выражения (5.8.65), (5.8.67) и (5.8.68), имеем следующую задачу одномерной нелинейной теплопроводности при заданном потоке в начале координат в виде степенной функции

$$f f_{\theta\theta} + \frac{1}{n} f_{\theta}^2 + \frac{m+1}{2} \theta f_{\theta} - m f = 0, \quad (5.8.70)$$

$$\frac{d f^{\frac{n}{n+1}}}{d \theta} = -1, \quad (5.8.71)$$

$$f(\theta \rightarrow \infty) = 0. \quad (5.8.72)$$

Таким образом, задача нелинейной теплопроводности сводится к краевой задаче (5.8.70)–(5.8.72) для обыкновенного дифференциального уравнения.

Найдем приближенные решения уравнения (5.8.70) с условиями (5.8.71), (5.8.72).

Предположим, что скорость распространения теплового фронта в задаче нелинейной теплопроводности (5.8.70), (5.8.71) и (5.8.72) при $n > 0$ и при нулевом начальном условии является конечной, тогда решение задачи (5.8.70)–(5.8.72) имеет точку $\theta = \alpha$, в которой температура среды обращается в нуль $f(\alpha) = 0$, но производная отлична от нуля $\frac{d^k f}{d \theta^k} \neq 0, (k = 1, \dots)$. Эти предположения соответствуют случаю поиска обобщенного решения задачи.

Будем искать решение уравнения (5.8.70) в виде:

$$f(\theta) = \sum_{i=0}^N \beta_i (\alpha - \theta)^i. \quad (5.8.73)$$

Из (5.8.73) определяются производные

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\alpha} = -\beta_1, \quad \left. \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right|_{\theta=\alpha} = 2\beta_2, \quad \dots, \quad (5.8.74)$$

$$\left. \frac{d^i f}{d\theta^i} \right|_{\theta=\alpha} = i! (-1)^i \beta_i.$$

Поскольку $f(\alpha) = 0$, то $\beta_0 = 0$. После подстановки (5.8.74) в (5.8.66) уравнение приводится к системе линейных алгебраических уравнений. Для ее решения использовалась система аналитических вычислений *Maple*.

Коэффициенты разложения ряда (5.8.73) для задачи (5.8.70)–(5.8.72) имеют вид:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \alpha n (m+1), \quad \beta_2 = \frac{1}{4} \frac{(m-1)n}{n+1},$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{12} \frac{n(m-1)(nm+n+2m)}{(n+1)^2 \alpha (1+2n)(m+1)}, \quad (5.8.75)$$

$$\beta_4 = \frac{1}{48} \frac{n(m-1)(nm+n+2m)(5nm-n+7m-3)}{\alpha^2 (n+1)^3 (1+2n)(m+1)^2 (3n+1)}.$$

Рассмотрим случай $n > 0$ и $k = 1/n$. Из (5.8.73) и (5.8.75) при $m = 1$ получаем решение

$$f(\theta) = \alpha n (\alpha - \theta). \quad (5.8.76)$$

Из граничного условия (5.8.71) имеем

$$\frac{(n+1)(\alpha^2 n)^{\frac{n+1}{n}}}{n\alpha} = 1. \quad (5.8.77)$$

Из (5.8.77) находится зависимость α от n :

$$\alpha = \left(n^{\frac{1}{n}}(n+1) \right)^{\frac{n}{n+2}}.$$

Некоторые значения α и n при $k = 1/n$ представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

n	1	4/3	2	5/2	3	4
α	1,2599	1,5299	2,0598	2,4586	2,8619	3,6840
n	9/2	5	11/2	6	13/2	7
α	4,1025	4,5256	4,9528	5,3838	5,8184	6,2561

Соответствующие решения задачи (5.8.66)—(5.8.72) при $k = 1/n$ ($n > 0$) задаются формулой (5.8.76).

Рассмотрим случай $n = 1$ при произвольном k . Приближенное решение задачи (5.8.66)—(5.8.72) с точностью до членов четвертого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}
 f(\theta) = & \frac{1}{2}\alpha(m+1)(\alpha-\theta) + \frac{1}{8}(m-1)(\alpha-\theta)^2 - \\
 & - \frac{1}{144} \frac{(3m+1)(m-1)}{(m+1)\alpha} (\alpha-\theta)^3 + \\
 & + \frac{1}{1152} \frac{(3m+1)(m-1)(3m-1)}{(m+1)^2\alpha^2} (\alpha-\theta)^4 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.8.78}$$

Из граничного условия (5.8.71) получаем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha^3 (105147 m^4 + 384822 m^3 + 519188 m^2 + 307082 m + 66161)}{2985984000 (m+1)^6} \times \\
 & \times (9491 + 24237 m^4 + 84342 m^3 + 54602 m + 103808 m^2) = 1.
 \end{aligned} \tag{5.8.79}$$

Из (5.8.79) находим значение α :

$$\alpha = 1440(m+1)^2 / (2548447839m^8 + 18195239088m^7 + 55955316456m^6 + 96920939400m^5 + 103409323126m^4 + 69458768096m^3 + 28562945760m^2 + 6527038184m + 627934051)^{\frac{1}{3}}.$$

Значения α и k при $n = 1$ представлены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

k	0	1	2	3	4	5
m	1/3	1	5/3	7/3	3	11/3
α	1,1762	0,7937	0,6222	0,5211	0,4532	0,4039

Решения задачи (5.8.66)—(5.8.72) при $n = 1$ находится по формуле (5.8.78) при использовании значений k и α из табл. 5.4.

При $k = 0$ приближенное решение задачи (5.8.66)—(5.8.72) имеет вид:

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{2\alpha(\alpha - \theta)}{3} - \frac{(\alpha - \theta)^2}{12} + \frac{(\alpha - \theta)^3}{144\alpha} - \frac{(\alpha - \theta)^5}{23040\alpha^3}, & 0 < \theta < \alpha; \\ 0, & \alpha < \theta; \end{cases} \quad (5.8.80)$$

где $\alpha = 1,1762$.

Рассмотрим случай $n = 4/3$ при произвольном k . Приближенное решение задачи (5.8.66)—(5.8.72) с точностью до членов четвертого порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} f(\theta) = & \frac{2}{3}\alpha(m+1)(\alpha - \theta) + \frac{1}{7}(m-1)(\alpha - \theta)^2 - \\ & - \frac{2}{539} \frac{(5m^2 - 2 - 3m)(\alpha - \theta)^3}{\alpha(m+1)} + \\ & + \frac{1}{37730} \frac{(205m^3 - 188m^2 - 43m + 26)(\alpha - \theta)^4}{(m+1)^2\alpha^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.8.81)$$

Значения α и k при $n = 4/3$ представлены в таблице 5.5.

Таблица 5.5

k	0	1	2	3	4	5
m	2/5	6/5	2	14/5	18/5	22/5
α	0,9256	0,6000	0,4608	0,3807	0,3278	0,2897

Решения задачи (5.8.66)–(5.8.72) при $n = 4/3$ находится по формуле (5.8.81), а значения k и α берутся из табл. 5.5.

Рассмотрим случай $k = 0$, $n > 0$. Из (5.8.69) следует, что

$$m = \frac{n}{n+2}.$$

Приближенное решение с точностью до членов четвертого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}
 f(\theta) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha n^2}{n+2} + \alpha n \right) (\alpha - \theta) - \frac{1}{2} \frac{n(\alpha - \theta)^2}{(n+1)(n+2)} + \\
 & + \frac{1}{6} \frac{n^2(\alpha - \theta)^3}{\alpha(n+1)^3(1+2n)} - \\
 & - \frac{1}{24} \frac{(2n^2 + n - 3)n^2(\alpha - \theta)^4}{(n+1)^5(1+2n)\alpha^2(3n+1)} + \dots
 \end{aligned} \tag{5.8.82}$$

Учитывая граничное условие (5.8.71), находим зависимость α от n . Значения α и n при $k = 0$ представлены в табл. 5.6.

Таблица 5.6

n	1	4/3	2	5/2	3	4
α	1,4819	1,1578	0,7889	0,6283	0,5178	0,3775
n	9/2	5	11/2	6	13/2	7
α	0,3307	0,2934	0,2632	0,2382	0,2172	0,1994

Приближенное решение задачи (5.8.66)—(5.8.72) при соответствующих значениях α и n задается формулой (5.8.82).

Решение исходной задачи находится по формулам:

$$T(x, t) = \begin{cases} (\chi n^2 q_0^2)^{\frac{1}{n+2}} t^{\frac{2k+1}{n+2}} (f(\theta))^{\frac{1}{n}}, & 0 \leq \theta \leq \alpha; \\ 0, & \alpha \leq \theta < \infty; \end{cases} \quad (5.8.83)$$

где θ имеет вид:

$$\theta = \frac{x}{(\chi^{n+1} n^n q_0^n)^{\frac{1}{n+2}} t^{\frac{n k+n+1}{n+2}}}. \quad (5.8.84)$$

Подставляя найденные выше приближенные решения для $f(\theta)$ при различных n в формулу (5.8.83), получаем приближенные решения исходной задачи.

Из (5.8.84) следует, что координата фронта тепловой волны зависит от времени в соответствии с формулой

$$x_f = \alpha (\chi^{n+1} n^n q_0^n)^{\frac{1}{n+2}} t^{\frac{n k+n+1}{n+2}}, \quad (5.8.85)$$

откуда, дифференцируя x_f по времени, находим скорость распространения тепловой волны при заданном потоке на границе.

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. — 480 с.
2. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Онти-НКТП-ДНТВУ, 1939. — 720 с.
3. *Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И.* Асимптотическая математика и синергетика. М.: Едиториал УРСС, 2004. — 304 с.
4. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. — 384 с.
5. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. — 542 с.
6. *Баренблатт Г.И.* // ПММ, 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67—78.
7. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. — 208 с.
8. *Бахолдин И.Б.* Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. — 318 с.
9. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. М.—Ижевск: РХД, 2001. — 384 с.
10. *Борисов А.В., Мамаев И. С.* Неголономные динамические связи. М.—Ижевск: РХД, 2002. — 328 с.
11. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгеброических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, Физматлит, 1998. — 288 с.
12. *Брюно А.Д.* // Успехи математических наук, 2004. Т.59. №3. С. 31—80.
13. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в однородных дисперсных системах. М.: Мир, 1983. — 136 с.

14. *Вернов С.Ю.* // Теоретическая и математическая физика, 2006. Т.146. №1. С. 161–171.
15. *Волосевич П.П., Леванов Е.И.* Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: МФТИ, 1997. — 234 с.
16. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1951. Т.45. №4. С. 309–360.
17. *Гинзбург В.И., Ландау Л.Д.* К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ, 1950. Т.20. С. 1064
18. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: РХД, 2002. — 288 с.
19. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, Физматлит, 1941. — 400 с.
20. *Доод Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. — 696 с.
21. *Дрюма В.С.* // Письма в ЖЭТФ, 1974. Т.19 С. 753–757.
22. *Дубровин Б.А.* Римановы поверхности и нелинейные уравнения. М.–Ижевск: РХД, 2001.
23. *Ефимова О.Ю., Кудряшов Н.А.* // Прикладная математика и механика, 2004. Т.68. С. 462–469.
24. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1971. Т.61. С. 118–134.
25. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* // Функциональный анализ и его приложения, 1974. Т.6. Вып.3. С. 43–53.
26. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. — 686 с.
27. *Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.* // Сборник посвященный 70 - летию академика А.Ф. Иоффе, М.: АН СССР, 1950. С. 61–71.
28. *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. — 478 с.
29. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: Физматлит, 2003. — 256 с.
30. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. — 280 с.

31. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989. — 48 с.
32. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа. М.: Знание, 1991. — 48 с.
33. *Кадомицев Б.Б., Петвиашвили В.И.* // ДАН СССР, 1970. Т.192. С. 753–756.
34. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. — 512 с.
35. *Карташов А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1986. — 288 с.
36. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. — 576 с.
37. *Колмогоров А.Н., Петровский Г.И., Пискунов Н.С.* // Бюлл. МГУ, 1937. Серия А. №6. С. 1–26.
38. *Полубаринова - Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. — 664 с.
39. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений, Институт компьютерных исследований. М.–Ижевск: РХД, 2004. — 360 с.
40. *Кудряшов Н.А.* Автомодельные задачи движения газа в пористой среде. М.: МИФИ, 1984. — 72 с.
41. *Кудряшов Н.А.* // Прикладная математика и механика, 1988. Т.52. С.361–365.
42. *Кудряшов Н.А.* // Доклады АН СССР, 1989. Т.308. №2. С. 294–298.
43. *Кудряшов Н.А.* // Мат. моделирование, 1989. Т.1. №6. С. 57–62.
44. *Кудряшов Н.А.* // Мат. моделирование, 1989. Т.1. №9. С. 151–158.
45. *Кудряшов Н.А.* // Мат. моделирование, 1990. Т.2. №12. С. 102–115.
46. *Кудряшов Н.А.* // Прикладная математика и механика, 2005. Вып.2. С. 226–234.
47. *Кудряшов Н.А.* Журнал вычислительной математики и математической физики, 2005. Т.45. №11. С. 2048–2055.
48. *Кудряшов Н.А., Чернявский И.Л.* // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2006. №1. С. 54–68.

49. Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И., Чернявский И.Л. // Нелинейная динамика, 2008. Т.4. №1. С. 68–86.
50. Кудряшов Н.А., Мигита А.В. // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2007. №3. С.145–154.
51. Кудряшов Н.А. Чмыхов М.А. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2007. Т.47. №1. С. 113–123.
52. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. — 736 с.
53. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997. — 496 с.
54. Лэм Дж.Л. Введение в теорию солитонов. Могилев: Бибфизмат, 1997. — 294 с.
55. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. — 270 с.
56. Марченко В.А. // Доклады АН СССР, 1950. Т.72. С.457
57. Маймистов А.И. Оптические солитоны // Соровский образовательный журнал, 1999. №11. С. 97–102.
58. Непомнящий А.А. // Известия АН СССР. МЖГ. 1974. №3. С. 28–34.
59. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 96с.
60. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. — 328 с.
61. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. — 400 с.
62. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. — 638 с.
63. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. — 256 с.
64. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. — 687 с.
65. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. — 480 с.

66. Солитоны в действии, Сборник статей под редакцией К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981. — 312 с.
67. *Свирижесев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987. — 368 с.
68. *Шкадов В.Я.* // Известия АН СССР. МЖГ, 1977. №1. С. 63–66.
69. *Фейман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Феймановские лекции по физике. М.: Мир, 1965. Т.4. — 260 с.
70. *Филиппов А.Т.* Многоликий солитон. М.: Наука, 1986. — 224 с.
71. *Френкель Я.И., Конторова Т.А.* // ЖЭТФ, 1943. Т.89. №8. С. 1340.
72. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. — 624 с.
73. *Улам С.* Приключения математика. М.–Ижевск: РХД, 2002. — 272 с.
74. *Уэрт Ч., Томсон Р.* Физика твердого тела. М.: Мир, 1966. — 568 с.
75. *Ablowitz M.J. and Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge university press, 1991.
76. *Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H.* // Phys. Rev. Lett., 1973. **31**. P.125.
77. *Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H.* // Stud. Appl. Math., 1974. V.53. P.249–315.
78. *Ablowitz M.J., Ramani A. and Segur H.* // J. Math. Phys., 1980. V.21. P. 715–721. P.1006–1015.
79. *Ablowitz M.J., Ramani A. and Segur H.* // Lett. Nuovo Cim., 1978. V.23. P. 333–338.
80. *Ablowitz M.J., Zeppetella A.* // Bull. Math. Biol., 1979. V.41. P.835–840.
81. *Aranson I., Kramer L.* // Rev. Mod. Phys., 2002. **74**. P.99–143. Arxiv cond - mat/0106115
82. *Aspe H., Depassier M.C.* Evolution equation of surface waves in a convecting fluid. // Phys. Rev. A., 1990. **41**. P.3125–3128.
83. *Bar D.E., Nepomnyaschy A.A.* // Physica D, 1995. **86**. P.586–602.
84. *Beresnev L.A., Nikolaevskiy V.N.* // Physica D, 1993. **66**. P.206–216.
85. *Benney D.J.* // J. Math. Phys., 1966. **45**, P. 150.
86. *Burgers J.M.* // Adv. Appl. Mech., 1948. **1**. P.171–199.

-
87. *Boussinesq J.* // Comptes Rendus, 1871. **72**, P. 755.
 88. *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* // J. Math. Phys., 1989. **30**. No.10. P. 2201–2213.
 89. *Chang H.C., Chen L.H.* // Chem. Engng. Sci., 1986. **41**. 10.
 90. *Cohen B.I., Krommes J.A., Tang W.M., Rosenbluth M.N.* // Nuclea Fusion, 1976. **16**. P. 971–992.
 91. *Cole J.D.* // Quart. Appl. Math., 1951. **9**. P. 225–236.
 92. *Conte R., Musette M.* // J. Phys. A.: Math. Gen., 1989. **22**. P. 169–177.
 93. *Conte R.* 1999 The Painleve property, one century later, CRM series in mathematical physics. New York: Springer-erlag, 1999. P. 77–180.
 94. *Cosgrove C.* // Stud. Appl. Math., 2000. V.104. P.1–77.
 95. *Gromak V.I., Laine I., Shimpura S.* Painleve Differential Equations in Complex Plane. Berlin–New York: Walter de Gruener, 2002. — 304 p.
 96. *Cross M.C., Hohenberg P.C.* // Rev. Mod. Phys., 1993. **65**. P.851.
 97. *Garazo A., Velarde M.G.* // Phys. Fluids A, 1991. **3**. P.2295–2300.
 98. *Drach J.* Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Paris, 1919. V.168. P.337–340.
 99. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D. and Miura R.M.* // Phys. Rev. Lett., 1967. **19**. P.1095–1097.
 100. *Goriely A.* // J. Math. Phys., 1996. V.37. P.1871–1893.
 101. *Hopf E.* // Commun. Pure and Appl. Math., 1950. **3**. P.201–230.
 102. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.M.* Studies in nonlinear problems. Thech. Rep., LA — 1940, Los–Alamos Sci. Lab.
 103. *Fisher R.A.* // Ann. Eugenics., 1937. **7**. P.335–369.
 104. *Henon M., Heiles C.* // Astron. J., 1964. V.69. P.73–79.
 105. *Hirota R.* // Phys. Rev. Lett., 1971. **27**. P.1192–1194.
 106. *Hone A.N.W.* // Physica D, 1998. **118**. P.1–16.
 107. *Hone A.N.W.* // Physica D, 2005. **205**. P.292–306.
 108. *Hopper A.P., Grimshaw R.* // Phys. Fluids, 1985. **28**. P.37.
 109. *Eremenko A.*, arXiv:nlin.SI/0504053. V.1 25 Apr. 2005, 1–10.
 110. *Kawahara T.* // Phys. Rev. Lett., 1983. **51**. 5. P.381–383.
 111. *Korteweg D.I., de Vries G* // Phil. Mag., 1895. **5**. 39. P.422–443.
 112. *Krishna M.V., Lin S.P.* // Phys. Fluids, 1977. **20**. 8.

113. *Kudryashov N.A.* // Physics Letters A, 1990. **147**. P.287–291.
114. *Kudryashov N.A.* // Physics Letters A, 1991. **155**. P.269–275.
115. *Kudryashov N.A.* // Physics Letters A, 1992. V.169. No.4. P.237–242.
116. *Kudryashov N.A.* // Physics Letters A, 1993. V.178. №1-2. P.99–104.
117. *Kudryashov N.A.* // Physics Letters A, 1993. V.182. P. 356–362.
118. *Kudryashov N.A., Nikitin V.A.* // J. Phys. A.: Math. Gen., 1994. V.27. P.101–106.
119. *Kudryashov N.A.* // J. Phys. A.: Math. Gen., 1994. V.27. P.2457–2470.
120. *Kudryashov N.A., Zargaryan E.D.* // J. Phys. A. Math. and Gen., 1996. **29**. P. 8067–8077.
121. *Kudryashov N.A.* // Physics Letters A., 1997. V.224. P.353–360.
122. *Kudryashov N.A., Gribov P.A.* // Труды XXIV школы—семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем". С.–Петербург, 1997. С.40–54.
123. *Kudryashov N.A., Soukharev M.B.* // Physics Letters A, 1998. V.237. P.206–216.
124. *Kudryashov N.A.* // Physics Letters A., 2005. V.342. P.99–106.
125. *Kudryashov N.A.* // Chaos, Solitons and Fractals, 2005. V.26. No.2. P.591–603.
126. *Kudryashov N.A.* // Chaos, Solitons and Fractals, 2005. V.24. P.1217–1231.
127. *Kudryashov N.A., Efimova O.Yu.* // Chaos, Solitons and Fractals, 2006. V.30. P.110–124.
128. *Kudryashov N.A., Demina M.V.* // Physics Letters A, 2007. V.368. P.237–234.
129. *Kudryashov N.A., Demina M.V.* // Physics Letters A, 2007. V.363. P.346–355.
130. *Kudryashov N.A., Demina M.V.* // Chaos, Solitons and Fractals, 2007. V.33. P.1480–1496.
131. *Kudryashov N.A.* // Regular and Chaotic Dynamics, 2008. V.13. P.234–239.
132. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* // Prog. Theor. Phys., 1976. **55**. P.356–369.
133. *Kus M.* // J. of Phys. A: Math. Gen., 1983. **16**. L689–L691.
134. *Lax P.D.* // Comm. Pure Appl. Math. 7, 159–193.

-
135. *Levine G., Tabor M.* // Physica D, 1988. **33**. P.189–210.
 136. *Murray J.D.* Mathematical Biology. Springer–Verlag, 2001. 556 p.
 137. *Matthews P.C., Cox S.M.* // Physical Review E, 2000. **62**, R1473–R1476.
 138. *McCall S.L., Hahn E.L.* // Phys. Rev. Lett., 1967. V.18. P.908–911
 139. *Newell A.C., Whitehead J.A.* Review of the finite bandwidth concept, in "Integrability of Continuous Systems Ed. H.H.E. Leipholz. Berlin:Springer–Verlag, 284
 140. *Olver P.J.* Lecture Notes in Physics. N.Y.: Springer, 1984. N195. P.273–290.
 141. *Perring J.K., Skyrme T.H.R.* // Nucl. Phys. 1962. V.31. P.550–555.
 142. *Porubov A.V.* // J. Phys. A.: Math. Gen., 1993. **26**. L707–L800.
 143. *Russel Scott J.* Report on waves. Report of the 14th Meeteng of the British Association for the Advancement of Science, Jhon Murray, London, 1844.
 144. *Segur H.* Topics in Ocean Physics, eds. A.R. Osborne and P. Malanotte Rizzoli. Amsterdam: North–Holland Publ. Co., 1982. P.235–277.
 145. *T. Sen, M. Tabor* // Physica D, 1990. **44**, P.313–339.
 146. *Sivashinsky G.I.* // Acta astronautica, 1977. **4**. P.1117–1206.
 147. *Sivashinsky G.I.* // Physica D, 1982. **4**. P.227–235.
 148. *M. Tabor, J. Weiss* // Phys. Rev. A., 1981. **24**. P.2157–2167.
 149. *Topper J., Kawahara T.* // J. Phys. Soc. Japen, 1978. **44**. 2. P.663–656.
 150. *Weiss J., Tabor M., Carnevalle G.* // J. Math. Phys., 1983. **24**. P.522–526.
 151. *Weiss J.* // J. Math. Phys., 1983. **24**. P.1405–1413.
 152. *Weiss J.* // Physics Letters A, 1984. V.102. No.8. P.329–331.
 153. *Weiss J.* // Physics Letters A, 1984. V.105. No.8. P.387–389.
 154. *Weiss J.* // J. Math. Phys., 1984. V.25. No.1. P.13–24.
 155. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* // Phys Rev. Lett., 1965. **15**. P.240–243.

Кудряшов Николай Алексеевич

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Редактор Е.Н. Кочубей

Подп. в печать 20.08.2008.	Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 22,0.	Печ. л. 22,0.
Изд. № 1-50.	Тираж 150 экз.
	Заказ №

*Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
115409, Москва, Каширское шоссе, 31.*

*Типография издательства „Тривант”.
г. Троицк Московской обл.*